
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01082625 3

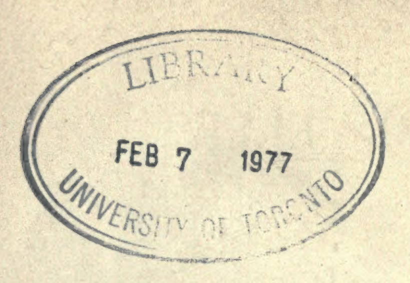

UNIVERSITY OF TORONTO
VELUT ARBOR ÆVO

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE

DE LA

LOUPE ET DE SES GROSSISSEMENTS



SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE
DE
LA LOUPE
ET DE SES GROSSISSEMENTS

PAR

M. G. QUESNEVILLE

DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR AGRÉGÉ A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHARMACIE
DIRECTEUR DU *Moniteur scientifique*

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne

1902

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE

DE LA

LOUPE ET DE SES GROSSISSEMENTS

AVANT-PROPOS

La théorie que nous allons donner de la loupe sera un nouveau chapitre que nous ajouterons à celui de la lunette de Galilée, et justifiera encore notre titre de nouvelle dioptrique des rayons visuels. C'est en ne se préoccupant pas de savoir si les rayons *divergents* tracés dans l'ancienne théorie de la lunette de Galilée pouvaient pénétrer dans l'œil, que l'on avait construit l'image virtuelle avec des rayons capables de photographier les objets extérieurs, mais non d'impressionner la rétine après avoir donné une image sur la choroïde.

Ici dans la loupe, les auteurs se sont bien préoccupés d'avoir des rayons convergents, qui par suite pouvaient être des rayons de vision, ils n'avaient donc pas commis la grossière erreur que nous avons relevée dans la lunette de Galilée de confondre la vision d'un point avec celle d'un objet qui ne peut être vu que s'il est limité par des rayons convergents. Mais les auteurs n'ont jamais suivi les rayons convergents de la loupe dans l'œil (*fig.* 3). Jamais ils ne se sont inquiétés de montrer *sur la choroïde* l'image réelle des objets visés à la loupe, image de diffusion qui devait être *préalablement formée* pour que la rétine secondairement impressionnée en transmît la vision au cerveau.

Ils ont ainsi négligé la réfraction de l'œil, dont l'indice était égal à celui du verre, et qui par suite dans les loupes à court foyer était aussi importante à considérer que celle de l'oculaire lui-même.

Mais non seulement l'œil ne pouvait être négligé quant à la réfraction, mais surtout quant au rôle physiologique de la rétine. Or dans le calcul de grossissement on n'en a tenu aucun compte et l'on a de suite enseigné, ce

qui était une erreur primordiale qui forme la base de tous les Traités de physique, que les images virtuelles tracées à la vision distincte à l'œil nu étaient celles que l'on visait.

La notion des lignes de direction de la vision, familière aux physiologistes, paraissait complètement inconnue des physiciens.

Ceux-ci semblaient ignorer que si un objet AB (*fig.* 1) est amené par un procédé quelconque à donner sur le fond de l'œil une image *ab*, quand celle-ci aura impressionné secondairement à sa formation la rétine, le cerveau croira voir l'objet A'B' suivant les *lignes de direction de la vision* *a*KA', *b*KB'.

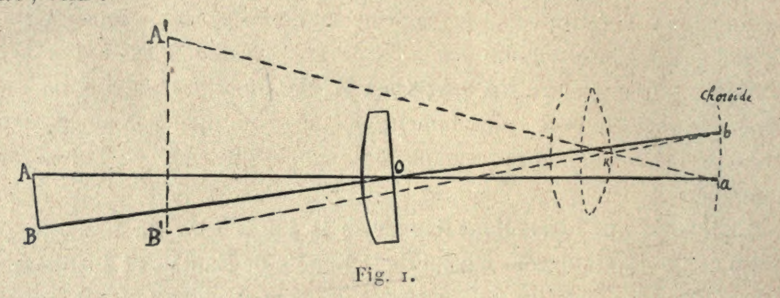


Fig. 1.

Or, comme les droites A*a*, B*b* étaient celles que les auteurs traçaient avec leurs images virtuelles, on voit la grosse erreur qu'ils commettaient en enseignant que l'on voyait l'objet grossi sous l'angle AOB (*fig.* 1 et 3), alors qu'il était vu sous l'angle A'KB', et que l'image virtuelle était en coïncidence avec la règle divisée placée à la vision distincte et qui devait aussi faire son image en *ab*.

Cette idée erronée de prendre les images virtuelles de la loupe pour des images de vision a conduit les auteurs qui calculaient le grossissement par la formule approchée :

$$G = \frac{\Delta}{f},$$

où l'on suppose l'objet près du foyer principal f de la loupe, à *ne jamais vouloir examiner* l'objet placé exactement au foyer principal de l'oculaire. En effet, les images virtuelles obéissaient à la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f};$$

pour $p = f$, $p' = \infty$.

Si l'image virtuelle était à l'infini, elle n'était donc pas en coïncidence avec la règle divisée placée à la vision distincte *minima* Δ, suffisamment

éloignée pour un observateur infiniment presbyte. Or nous rappellerons que les presbytes voient nettement les objets éloignés et nous montrerons que pour ceux qui sont très presbytes les objets vus à la loupe pour être nettement visibles doivent être *exactement placés au foyer principal de l'oculaire.*

Donc c'est la meilleure démonstration que l'on pouvait donner que l'image virtuelle de construction n'était jamais en coïncidence avec l'image de vision, elle placée au minimum de la vision distincte.

Ainsi dans le cas actuel, même en admettant que O et K fussent en coïncidence, pour un observateur infiniment presbyte, l'objet ne sera nettement visible que s'il se trouve au foyer principal de l'oculaire ; l'image virtuelle de la loupe est au *punctum remotum* de l'observateur c'est-à-dire à l'infini, alors que l'image *de vision* est à son *punctum proximum* où se trouve la règle divisée, suffisamment éloignée pour que son image puisse être considérée comme se formant aussi sur la choroïde de l'observateur infiniment presbyte.

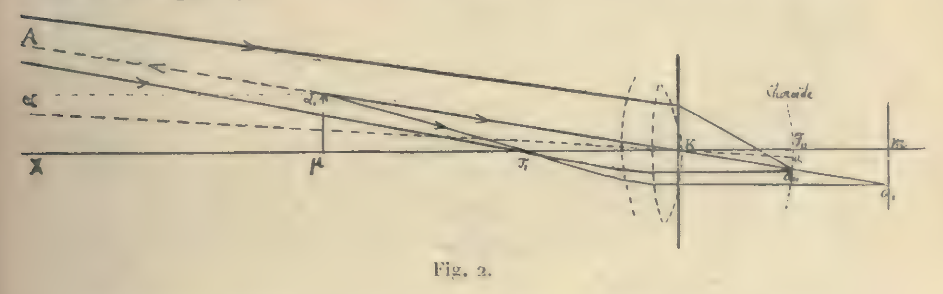


Fig. 2.

A l'ancienne théorie de la loupe qui ne consistait que dans la construction d'images virtuelles placées censément à la vision distincte des observateurs, il y avait donc lieu de substituer une nouvelle théorie dans laquelle les images virtuelles n'intervenaient plus du tout, car quand on tient compte de l'œil, l'objet est toujours *au delà* du foyer principal du système mixte oculaire-cristallin (*fig.* 2).

Cette théorie était la suivante :

L'objet placé en deçà de la vision distincte est vu plus gros à l'œil nu, uniquement parce que l'angle visuel, sous lequel on le vise, est plus ouvert qu'à la vision distincte minima habituelle pour laquelle l'œil est accommodé.

Remarquons que $\alpha_1\mu$ par suite de la réfraction de l'œil fait son image optique en a_1m. Cette image serait vue nette si la rétine était en a_1m. On a donc une image sur la choroïde avec des cercles de diffusion et par suite trouble. Mais toute trouble qu'elle est, elle reporte parfaite-

ment au cerveau l'impression lumineuse d'une longueur $a_{\prime\prime}F_{\prime\prime}$. Or, une telle longueur, si elle était parfaitement limitée par ses bords, répondrait à un objet de grandeur AX placé à la vision distincte. C'est pour cela que $\alpha_1\mu$ donne au cerveau par $a_{\prime\prime}F_{\prime\prime}$ trouble la même impression connue de AX. Bien que les bords de $a_{\prime\prime}$ ne soient pas très nets, on peut donc juger que le grossissement à l'*œil nu* est donné par les relations :

$$G = \frac{a_{\prime\prime}F_{\prime\prime} \text{ (mal délimité)}}{aF_{\prime\prime}} = \frac{AX}{\alpha X} = \frac{AX}{\alpha_1\mu}.$$

Si l'on remarque que pour l'œil, $F_{\prime}$ est son premier foyer principal, situé à 12mm,83 de la cornée transparente (en deçà de 12mm,83 on rentre dans la catégorie des images entoptiques) et que l'objet que l'on visera ultérieurement à la loupe est bien au-delà de $F_{\prime}$, il en résulte que l'on a déterminé exactement le grossissement à l'œil nu par la formule des auteurs, avec une image AX que nous nommerons *de vision* et qui n'*était pas l'image virtuelle du cristallin*, puisque $\alpha_1\mu$ était *au delà de* $F_{\prime}$. De même quand on regardera à la loupe (*fig.* 4), le système oculaire-cristallin aura son foyer principal en F', *au delà* duquel *sera toujours placé* l'objet qui, par suite, ne donnera jamais d'image virtuelle dans ce système.

Ainsi nous obtenons un grossissement sans loupe, que nous calculons par la formule habituelle des auteurs. Remarquons que si au lieu d'avoir à faire à un presbyte nous eussions été en présence d'un myope susceptible de grands efforts d'accommodation bien plus considérables que ceux qu'il fait d'habitude, l'image de projection a_1m aurait pu être ramenée par des efforts exceptionnels d'accommodation sur la choroïde, par suite nous aurions eu une vision nette de $a_{\prime\prime}F_{\prime\prime}$. Dans ces conditions nous aurions pu dire que $\alpha_1\mu$ était vu aussi nettement qu'à la loupe et nous calculions comme plus haut le grossissement en nous basant sur l'accommodation habituelle du myope et non sur cette accommodation exceptionnelle.

Dans l'un et l'autre cas l'*image de vision n'était nullement l'image virtuelle du cristallin*. Ce premier fait constaté pour la vision à l'œil nu, nous a amené à nous demander si l'oculaire placé entre l'œil et l'objet (*fig.* 4) n'avait pas pour but, comme dans les petites lunettes, de se substituer aux efforts d'accommodation et d'amener purement et simplement l'image de α_1F qui, à l'œil nu, se ferait en a_1m, à se former exactement sur la choroïde.

C'est ce qui se passe en réalité.

Or, supposons que comme première approximation le centre optique du système oculaire-cristallin soit très voisin de K et un peu en avant, l'image a_1m, grâce à l'oculaire, se forme exactement sur la choroïde, donc vision

nette, et les rayons incidents du système oculaire-cristallin qui passent par ce centre optique étant très voisins des rayons $A\alpha'_1Ka_{''}$ de vision, il en résulterait que le *grossissement serait sensiblement le même que celui que l'on avait mesuré à l'œil nu* (*fig.* 2).

Ainsi la modification que peut apporter l'oculaire dans le grossissement à l'œil nu des objets en deçà de la vision distincte est *secondaire* ; car elle *serait nulle*, si les rayons traversant l'oculaire pouvaient être considérés comme pénétrant directement dans l'œil en passant par le point nodal.

Ceci nous a donc amené à dire qu'il existait *deux* grossissements de la loupe, le grossissement *apparent* qui se calcule exactement comme le grossissement à l'œil nu, et le *grossissement réel de la loupe* dont on n'a aucune idée d'après le grossissement apparent et qui tient uniquement à ce que le centre optique du système oculaire-cristallin ne coïncide pas avec le point nodal de l'œil.

Dans les lentilles à long foyer, quand l'objet que l'on regarde à la loupe est exactement à la vision distincte *minima*, c'est-à-dire au *punctum proximum* de l'observateur, le grossissement *apparent* n'existe plus ; alors on n'a pas plus que le *grossissement réel de la loupe*.

Donc pour savoir ce qu'est réellement le grossissement de la loupe, en donner la mesure et la définition, on doit commencer l'étude des loupes, par les lentilles à long foyer.

On arrive alors à cette définition du grossissement que l'on retrouve précisément dans la lunette astronomique : le grossissement *réel* est le rapport de l'angle sous lequel on vise l'objet *vu agrandi* à l'angle sous lequel on vise l'objet lui-même, *là où il est placé, au punctum proximum*.

Le grossissement *apparent* est, comme nous l'avons indiqué, dans le grossissement à l'œil nu, le rapport de l'angle sous lequel on vise l'objet *vu agrandi* à l'angle sous lequel ou a l'habitude de placer l'objet pour le voir nettement, c'est-à-dire à la vision distincte *minima*. C'est la définition ordinaire.

L'erreur des auteurs est de ne pas avoir fait de distinction entre ces deux grossissements pour les lentilles à court foyer, et d'avoir cru que le grossissement apparent donnait le grossissement réel de la loupe.

Si G est le grossissement *réel*, G' le grossissement *apparent*, ϖ la distance au point nodal de l'œil de l'objet vu *distinctement à la loupe*, Δ la distance *minima* (*punctum proximum*) au même point nodal des objets vus *distinctement à l'œil nu*, nous montrerons que l'on a :

$$G = G' \frac{\varpi}{\Delta}.$$

D'un autre côté, si $\alpha_1 F$ est la grandeur de l'objet, AX son agrandissement mesuré à l'aide de la chambre claire et d'une règle placée à la vision distincte minima de l'observateur, on a comme on sait :

$$G' = \frac{AX}{\alpha_1 F}.$$

Il en résulte donc que pour différents observateurs on mesurera des grandeurs, AX, A′X′, A″X″, d'un même objet $\alpha_1 F$ correspondant à des valeurs Δ, Δ', Δ'', totalement différentes du myope au presbyte, pour des positions ϖ, ϖ', ϖ'', qui sont elles, par contre, assez rapprochées. Donc les grossissements *apparents* mesurés seront *totalement différents*, alors que le grossissement *réel* de la loupe étant donné par la formule :

$$G = \frac{\varpi}{\alpha_1 F} \frac{AX}{\Delta},$$

sera sensiblement constant d'*un observateur à un autre* parce que $\varpi \frac{AX}{\Delta}$ varie peu et *rigoureusement constant* pour le même observateur, visant une règle divisée à des distances Δ, Δ_1, Δ_2, comprises entre son *punctum proximum* et son *punctum remotum*. En effet, pour celui-ci, ϖ reste constant comme dans les oculaires à micromètre et les grandeurs AX, A_1X_1, A_2X_2,... que l'on mesure à des distances Δ, Δ_1, Δ_2, avec des efforts différents d'accommodation donnent :

$$\frac{AX}{\Delta} = \frac{A_1X_1}{\Delta_1} = \frac{A_2X_2}{\Delta_2} = \ldots\ldots$$

c'était donc encore une erreur commise par les auteurs de croire que l'on ne pouvait arriver au grossissement réel de la loupe qu'en se plaçant à la vision distincte *minima*.

A l'ancienne figure classique de tous les auteurs qui ne donne que des notions absolument fausses, puisqu'on ne vise jamais les images virtuelles par la raison bien simple qu'elles n'existent pas dans le système oculaire-cristallin, et que nous reproduisons (*fig.* 3), nous avons substitué la seconde (*fig.* 4) dans les conditions où un observateur infiniment presbyte procèderait à la mesure du grossissement apparent avec la chambre claire.

La dernière figure nous donne la théorie nouvelle de la loupe à court foyer et de ses grossissements apparent $\frac{\alpha'_1 F}{\alpha' F}$ et réel $\frac{\alpha'_1 F}{\alpha_1 F}$ que nous allons développer dans ce mémoire.

En résumé, les considérations dans lesquelles nous venons d'entrer ont montré l'importance qu'il y avait dans l'étude du grossissement à étudier préalablement la marche des rayons dans l'œil.

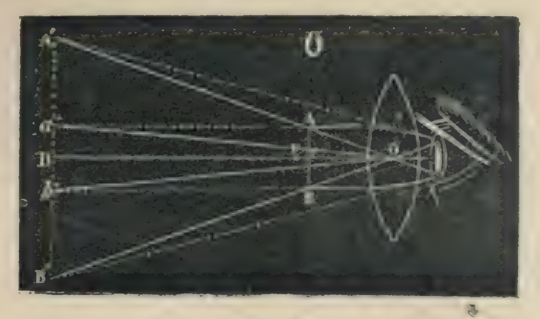


Fig. 3.

On peut se rendre compte de l'erreur commise par les auteurs soit dans le grossissement de la lunette astronomique, soit dans celui de la loupe, en représentant purement et simplement l'œil par un point suivi de la lettre O.

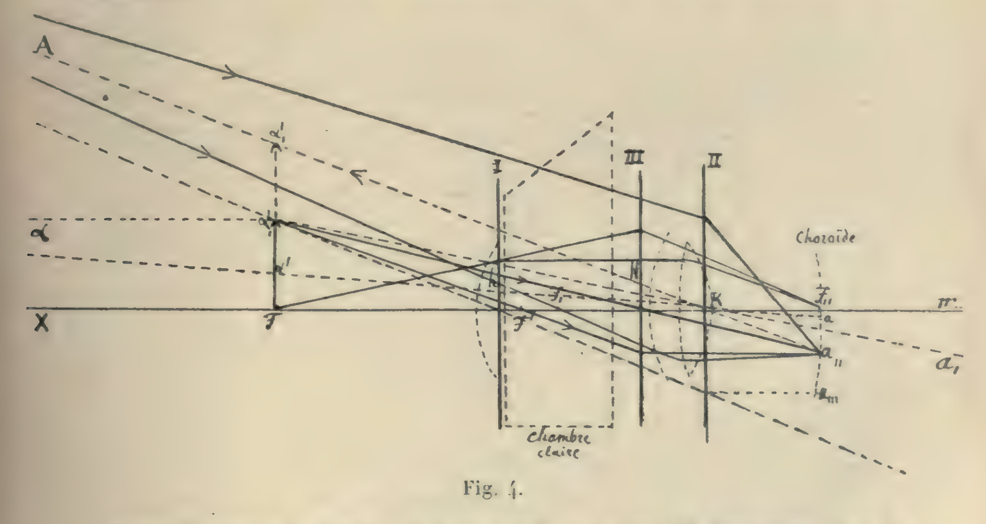


Fig. 4.

Déclarer dans la lunette astronomique que l'œil (?) représenté par la lettre O, est placé dans le plan de l'anneau oculaire, plan déterminé avec le seul oculaire, était une erreur aussi grossière que celle que l'on aurait commise, si l'oculaire avait été composé de deux lentilles, de n'avoir déterminé l'anneau oculaire qu'avec une seule, négligeant la seconde.

Dans la loupe, supposer pour *simplifier* l'œil au centre optique de celle-ci (*fig.* 3), était une erreur encore plus grande, car cette simplification re-

venait à supposer nul le grossissement *réel* de la loupe, et à réduire son grossissement *apparent* au grossissement à l'*œil nu*. Et c'est ainsi que nous avons retrouvé pour le calcul du grossissement à l'œil nu la formule même par laquelle les auteurs avaient cru avoir déterminé le grossissement (apparent) de la loupe.

La théorie du grossissement de la loupe était intimement liée à la réfraction de l'œil d'une part, au rôle physiologique de la rétine d'autre part, et en négligeant l'un et l'autre on peut dire qu'il n'existe pas actuellement de théorie même approchée de la loupe, et que ce qui a été enseigné et répété successivement dans les ouvrages n'a été qu'un tissu d'erreurs. Mieux vaudrait n'avoir donné aucune explication de la loupe, que d'avoir enseigné des faits aussi enracinés que ceux représentés par les figures multiples où avec complaisance les auteurs ont représenté des images virtuelles dans les lentilles CONVERGENTES.

Or, si l'objet était en effet *en deçà* du foyer principal F de l'oculaire seul, il était, au contraire, *au delà et toujours* du foyer principal F′ de l'association de ces deux lentilles l'*oculaire et le cristallin* SANS LEQUEL IL N'Y A PAS DE VISION et par suite qu'on *ne devait jamais séparer de l'oculaire* (*fig.* 4).

Donc dans ce système il n'y avait pas formation d'images virtuelles, et par conséquent toutes les figures des lentilles convergentes à images virtuelles doivent à jamais disparaître des Traités de physique, à moins qu'on en conserve une seule comme spécimen tératologique à montrer d'une erreur qui s'était perpétuée.

En effet, pour les images reçues sur des écrans, inutile de les figurer puisque pour la position des objets entre le foyer principal et la lentille convergente il n'y a plus d'image susceptible d'être reçue sur un écran.

Pour les loupes, *comme il n'y a pas de vision sans cristallin*, et que dans le système loupe-cristallin l'objet ne donne jamais d'image virtuelle, il n'y avait donc pas à en parler.

Autant la notion des images virtuelles était justifiée dans les lentilles divergentes autant elle est incompréhensible dans les lentilles convergentes. Les premières répondaient à un phénomène rationnel, celui qui amenait sous l'œil de l'observateur un objet très grand et éloigné, faisant partir pour ainsi dire les rayons de la petite surface qu'est l'image virtuelle. Avec la loupe on obtenait l'inverse dans la théorie des auteurs. Pour un observateur infiniment presbyte c'était, en réalité, à l'infini qu'on reportait l'image virtuelle, sans se demander ce que devenait l'intensité lumineuse d'un objet de grandeur finie étalé sur une immense surface.

Alors que pour distinguer une dimension de 1/10 millimètre trop petite

pour être vue à la vision distincte, instinctivement on la rapprochait de l'œil de manière à la viser dans un angle 10 fois plus grand, la loupe glissée entre l'objet et l'œil aurait eu pour fonction (*fig.* 3) d'aller à l'encontre de ce qu'on venait de faire et de reporter l'objet là où on ne le voyait pas à l'œil nu ! Il est vrai que ses dimensions devenaient 10 fois plus grandes, mais alors son intensité lumineuse diminuait d'autant.

Or, l'intensité est tout dans la vision.

Nous avons vu que l'objet reste en réalité là où instinctivement on l'a approché de l'œil et que la fonction de la loupe est avant tout de ramener sur la choroïde l'image de l'objet qui, à l'œil nu, se fait au delà de cet écran en a_1m (*fig.* 4).

La notion de la vision distincte des objets vus à travers une lentille, vision distincte totalement différente de celle des objets vus à l'œil nu, avait échappé aux auteurs.

Pour l'observateur infiniment presbyte la vision distincte à l'œil nu était l'infini, et la vision distincte, à travers la loupe, le foyer principal de celle-ci. Il n'y avait donc pas à reporter à la vision distincte à l'œil nu les rayons visuels d'un objet qui traversaient la loupe et le cristallin, système donnant sur la choroïde une image nette de l'objet.

Si, grâce à une chambre claire, on projette en même temps sur le fond de l'œil l'image d'une règle divisée, on a deux images superposées sur la choroïde, qui impressionnent la rétine ; le cerveau en fait la comparaison. Et c'est tout. L'une des images a été formée par des rayons ayant traversé deux lentilles, et l'autre une seule lentille qui est le cristallin. Elles sont toutes les deux des images de projection.

Il en résulte donc que la notion des images virtuelles dans les lentilles CONVERGENTES doit disparaître avec toutes les figures correspondantes des ouvrages de physique.

Le rôle de l'œil étant si important, puisqu'il nous amène à rayer la notion des images virtuelles dans les lentilles convergentes, on voit qu'il sera toujours indispensable d'en rappeler, d'après Listing, les éléments constituants, avant de procéder à la théorie de la loupe.

C'est ce que nous allons commencer par faire.

I. — Rappel des éléments et des propriétés de l'œil schématique

Sur la non existence des images virtuelles de vision à la loupe.

Voici, d'après Listing, les éléments de l'œil schématique que nous trouvons dans l'*Optique physiologique* d'Helmholtz.

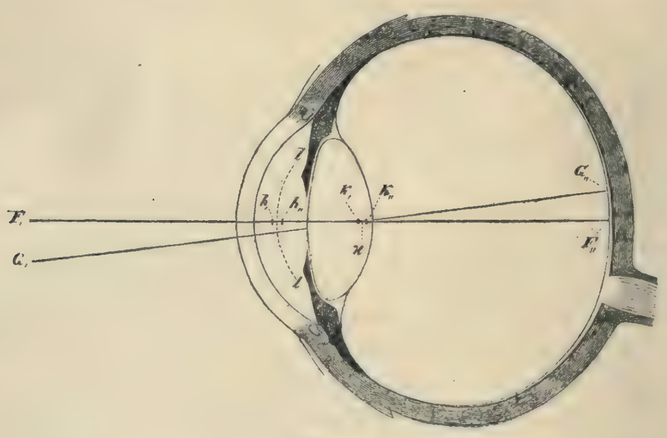


Fig. 5.

En prenant égal à 1 l'indice de réfraction de l'air on a :

Indice de réfraction de l'humeur aqueuse	$\frac{103}{77}$
Indice de réfraction du cristallin	$\frac{16}{11}$
Indice de réfraction du corps vitré.	$\frac{103}{77}$
Rayon de courbure de la cornée	8^{mm}
Rayon de courbure de la surface antérieure du cristallin.	10^{mm}
Rayon de courbure de la surface postérieure du cristallin.	6^{mm}
Distance de la face antérieure de la cornée à la surface antérieure du cristallin.	4^{mm}
Epaisseur du cristallin	4^{mm}

Listing a déduit avec ces nombres les valeurs suivantes des constantes de l'œil schématique.

Le premier foyer $F_{,}$ est à $12^{mm},8326$ en avant de la cornée.

Le second foyer F_{II} est à $14^{mm},6470$ en arrière de la surface postérieure du cristallin.

Le premier point principal h_{I} est à $2^{mm},1746$, le second h_{II} à $2^{mm},5724$ en arrière de la surface postérieure du cristallin.

La première distance focale principale de l'œil $F_{I}\,h_{I}$, est par suite de $15^{mm},0072$, la seconde $F_{II}\,h_{II}$ de $20^{mm},0746$.

Listing a encore simplifié le schéma en prenant ce qu'il appelle l'*œil réduit*, c'est-à-dire en plaçant à $2^{mm},3448$ en arrière de la surface antérieure de la cornée le point principal unique et le point nodal moyen K à 0,4764 en avant de la face postérieure du cristallin : les foyers restent dans leur position.

Du moment que l'on a pris un point nodal unique, celui-ci pourrait être encore considéré comme le centre d'une surface réfringente que la ligne pointillée *ll* représente et qui aurait $5^{mm},1248$ de rayon de courbure. Dans ces conditions on voit que les rayons normaux à cette surface passent sans déviation par le centre nodal.

Celui-ci a donc les propriétés du centre optique des lentilles. Aussi à l'*œil réduit* de Listing présentant une *seule surface* réfringente, nous avons *substitué une lentille* infiniment mince à deux courbures représentée par une droite passant par le centre nodal moyen K avec les deux foyers ordinaires F_{I}, F_{II} de l'œil schématique qui seront dans ces conditions placés par rapport à cette droite aux *deux distances focales principales* suivantes :

Le premier foyer F_{I} à $12^{mm},8326 + 4 + 4 - 0,4764 = 20^{mm},3562$ du centre nodal moyen K, le second foyer F_{II} à $14^{mm},6470 + 0,4764 = 15^{mm},1234$ du même centre nodal K.

Cette substitution d'une lentille à deux courbures, à l'œil réduit de Listing, aura l'avantage de rendre uniforme les constructions tout en les simplifiant, et de rappeler qu'il n'était pas permis d'oublier cette lentille aussi importante que l'oculaire lui-même dans le calcul du grossissement.

La propriété du second foyer F_{II} est caractérisée par ce fait que chez un œil normal, grâce à des efforts d'accommodation, ou chez un œil de presbyte, les rayons incidents parallèles à l'axe viennent faire image en ce point sur la choroïde pour impressionner ultérieurement la rétine : donc si l'œil regarde un objet à travers une lentille dite oculaire, le problème à résoudre est le suivant : où doit être placé l'objet pour que son image se fasse exactement sur la choroïde (vision nette) alors que les rayons lumineux doivent traverser deux lentilles, l'oculaire et celle que nous avons substituée à l'œil ?

Supposons que l'observateur soit un presbyte. Celui-ci, comme tous les

observateurs, a deux visions extrêmes entre lesquelles les objets sont également vus distinctement. Les objets très éloignés, pouvant être considérés comme à l'infini, c'est-à-dire pénétrant dans l'œil parallèlement à l'axe, viennent faire image sur la choroïde en $F_{\prime\prime}$, c'est le *punctum remotum*, les objets placés ou *punctum proximum* viennent encore faire image sur la choroïde, par suite de la position que prend le cristallin par rapport à la choroïde.

Supposons que l'observateur soit infiniment presbyte ou que presbyte il vise à la distance de son *punctum remotum*, par suite, les objets éloignés. En regardant à l'œil nu, ce sont donc les rayons parallèles à l'axe (*fig.* 6) qui viendront faire image en $F_{\prime\prime}$.

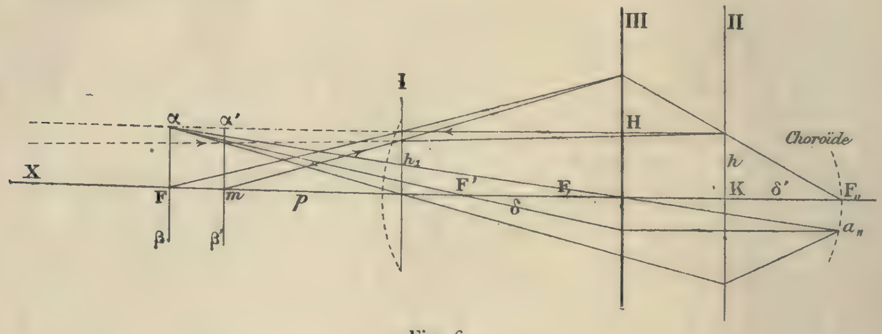


Fig. 6.

Donc, si l'observateur infiniment presbyte regarde maintenant un objet αβ à travers un oculaire convergent I dont F est le foyer, il devra placer cet objet *exactement au foyer principal* F de l'oculaire, puisque les rayons parallèles à la sortie viennent converger en $F_{\prime\prime}$. Ainsi, *grâce à l'oculaire*, l'observateur *infiniment presbyte* peut voir nettement des objets placés *à quelques centimètres* de l'œil et, par suite, bénéficier de l'intensité lumineuse des objets rapprochés.

Le rôle *primordial de l'oculaire* était donc de remédier aux efforts impuissants de l'accommodation, puisque le presbyte, ne voyant bien qu'à l'infini, en était dépourvu.

C'est ce rôle qui a été complètement méconnu par les auteurs, croyant que la loupe grossissait surtout les objets, alors que le grossissement dû à la loupe était secondaire, et que le grossissement apparent tenait surtout à ce que l'objet était très rapproché de l'œil, qu'il existait déjà mais trouble sans loupe, et que l'oculaire, comme la figure le montre, rendait net en l'augmentant un peu ce grossissement de l'œil.

Pour l'observateur infiniment presbyte ou visant à son *punctum remo-*

tum, l'image de $F\alpha$ se fera donc exactement sur la choroïde en $F_{a}\alpha_{a}$. En joignant a_{a} à α on trouvera le centre optique du système III que l'on peut substituer au système I et II. Et en menant de a_{a} une droite parallèle à l'axe jusqu'à sa rencontre avec la droite III, on obtiendra F′, c'est-à-dire le foyer principal du système III. Donc l'objet $\alpha\beta$ est toujours *au delà du foyer principal* F′ *du système* III substitué à l'oculaire et au cristallin et, par conséquent, l'image $F_{a}a_{a}$ est encore l'image de *projection* de $\alpha\beta$ dans ce système sur l'*écran* $F_{a}a_{a}$ qui est ici la choroïde.

Ainsi l'objet $\alpha\beta$ *ne pouvait donner d'image virtuelle* dans le système oculaire-cristallin, *système mixte sans lequel il n'y a pas de vision.*

Un observateur auquel on a fait l'opération de la cataracte ne voit pas à la loupe.

Il est facile de calculer la position de III et la grandeur de la distance focale principale f' de III. On a en effet pour un œil infiniment presbyte, en nommant e' la distance de F_{a} à I :

$$\frac{1}{f+\delta} + \frac{1}{e'-\delta} = \frac{1}{f'}, \tag{1}$$

$$\frac{f}{h} = \frac{f+\delta}{H}, \qquad \frac{\delta'}{h} = \frac{e'-\delta}{H} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta'}{f} = \frac{e'-\delta}{f+\delta}$$

d'où :

$$\delta = f\frac{e'-\delta'}{f+\delta'}.$$

Ayant δ, la relation (1) donne f'.

Supposons maintenant que le même observateur presbyte, après avoir visé l'objet à travers l'oculaire pour son *punctum remotum*, vise pour son *punctum proximum* Δ, là où il placera la règle divisée qu'il verra à l'œil nu, Δ étant la distante minima comptée de la règle au point nodal.

L'objet pour être aussi nettement visible, c'est à-dire faire son image comme précédemment en F_{a} sur la choroïde, les efforts d'accommodation étant nuls, c'est-à-dire δ' invariable, devra évidemment être en avant de F. En effet, les rayons venus de II et parallèles à l'axe, viennent après réfraction dans I passer par F. Ceux qui viennent de II et ont la direction du centre optique de I passent, sans déviation, donc les rayons compris entre ces deux directions, viennent après réfraction passer par m. Et inversement un rayon venu de m, après réfraction dans I et II, fera son image en F_{a}.

Ainsi un objet placé en deçà du foyer principal de l'oculaire et à une distance convenable et *visé à travers cette lentille* sera vu aussi distincte-

ment qu'une règle divisée, visée à l'œil nu et placée à la vision distincte *minima*.

Inversement, on pourrait placer l'objet entre $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ pour qu'il fût vu aussi distinctement qu'une règle divisée visée à l'œil nu et placée entre le *punctum proximum* et le *punctum remotum* de l'observateur.

Dire que la vision est aussi distincte à travers l'oculaire qu'à l'œil nu, c'est dire que sur la choroïde se forme une image de l'objet comme il se forme une image de la règle divisée.

Comme δ et δ' dans la figure restent invariables pour le même observateur presbyte visant au *punctum proximum* et *remotum*, il s'en suit que la relation (1) devient :

$$\frac{1}{p+\delta} + \frac{1}{e'-\delta} = \frac{1}{f'_1} \qquad (1^{\text{bis}})$$

c'est-à-dire que le foyer principal F′ du système mixte change nécessairement pour le même observateur non susceptible d'efforts d'accommodation, quand il observe au *punctum proximum* après avoir visé au *punctum remotum*.

A la relation (1 *bis*) connue quand p et δ seront déterminés, on prendra les trois relations comme on le voit par la figure 6 :

$$\frac{f}{h} = \frac{f+\delta}{H}, \qquad \frac{p}{h_1} = \frac{p+\delta}{H}, \qquad \frac{\delta'}{h} = \frac{e'-\delta}{H}$$

qui jointes à la relation de la vision distincte à l'œil nu :

$$\frac{\Delta - (e'-\delta')}{h_1} = \frac{\Delta}{h} \quad \text{d'où} \quad \frac{h}{h_1} = \frac{\Delta}{\Delta - (e'-\delta')}$$

donneront la solution complète du problème.

En effet, on a comme précédemment :

$$\delta = f\frac{e'-\delta'}{f+\delta'} \qquad (a)$$

puis :

$$p = f\,\frac{e'-\delta'}{\frac{h}{h_1}(f+e') - (f+\delta')} \qquad (b)$$

on voit que p varie avec $\frac{h}{h_1}$, c'est-à-dire avec la vision distincte minima Δ du presbyte qui varie d'un observateur à un autre. Au contraire, pour tous les presbytes visant au *punctum remotum* $\Delta = \infty$, on avait $\frac{h}{h_1} = 1$ d'où

$p = f$; pour ceux-ci il n'y avait qu'une position de l'objet, c'était le foyer principal de l'oculaire. Ainsi pour un observateur infiniment presbyte, l'objet devait être placé exactement au foyer principal de l'oculaire et en deçà pour les visions intermédiaires.

Le rôle *primordial* de la lentille placée entre l'œil et un objet en deçà de la vision distincte, a donc été *avant tout* de permettre à cet objet de faire son image de projection sur la choroïde. Ce rôle a été méconnu par les auteurs.

Nous calculerons le grossissement réel de la loupe et nous verrons qu'elle modifie peu le grossissement apparent que l'on observe à l'*œil nu* à la distance en deçà de la vision distincte à laquelle l'objet est placé. Ainsi si le grossissement pour une certaine distance de l'objet était égal à 7 à l'œil nu, en intercalant une loupe le grossissement monte à 10, que l'on avait pris pour celui de la loupe, alors que c'était celui de l'œil et de la loupe. Le rôle des loupes à court foyer était de faire voir distinctement des objets *très rapprochés* de l'œil, *ce qui suffisait déjà pour qu'on pût les voir grossis*, même à l'œil nu.

Les auteurs ont donc complètement méconnu la fonction de l'oculaire, qui était de ramener l'image de projection des objets sur la choroïde, d'en augmenter un peu secondairement le grossissement, puisque jamais les auteurs ne se sont occupés de montrer l'image de projection des objets sur la choroïde, ce qui était fondamental pour expliquer la netteté de la vision.

La figure que nous venons de donner nous a donc permis pour la première fois de comprendre le rôle de la loupe dans la vision nette des objets placés en deçà de la vision distincte minima et qui, par suite, visés à l'œil nu, iraient faire leur image au delà de la choroïde.

Nous allons supposer les objets placés entre le *punctum proximum* et le *punctum remotum*, condition dans laquelle ils seront vus à l'œil nu plus petits qu'à la vision distincte minima, et alors si nous les regardons à l'aide d'une lentille à long foyer *lorsqu'ils sont exactement placés au punctum proximum*, et en même temps en deçà du foyer principal de l'oculaire, nous serons certain dans ces conditions que le grossissement observé *sera uniquement dû au grossissement de la loupe*, et en donnera la mesure précise en même temps que la définition.

II. — Grossissement des loupes a long foyer

Définition du grossissement réel de la loupe.

Nous supposerons d'abord que nous sommes au *punctum proximum* d'un presbyte ou d'un myope qui, regardant avec son lorgnon, voit à la même distance aussi nettement que le presbyte.

Presbyte ou myope, muni de son lorgnon, à cette distance, ne voient pas des lettres trop petites, et c'est alors qu'ils regardent avec une loupe à main.

Si l'on est en présence d'une loupe à long foyer (25 centimètres) comme les loupes à main, dont la théorie est toujours passée sous silence, et qui est la plus intéressante, l'œil est situé, comme on sait, à 30 ou 40 centimètres de cette loupe. L'observateur presbyte ou myope, avec son lorgnon, veut voir sur son bureau sans se baisser des lettres trop petites, alors qu'il voit nettement, à la même distance, celles de plus grandes dimensions.

Il approche la loupe à main des premières et, regardant à 30 ou 40 centimètres de celle-ci, il voit les lettres grossies et peut en faire la lecture.

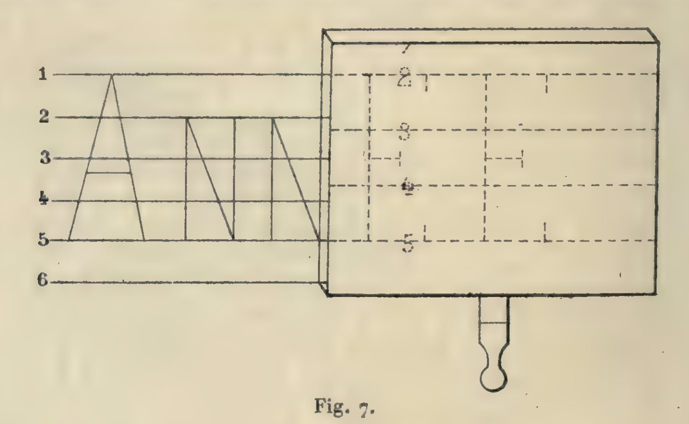


Fig. 7.

En traçant sur une feuille de papier des traits 1,2... 5,6 pour une certaine distance de la loupe aux traits de 8 centimètres et de la loupe à l'œil de 25 centimètres, on voyait ce qu'indique la figure 7. En demandant à des personnes étrangères à toute science ce qu'elles en concluaient, elles nous ont dit que les lettres E étaient grossies, aussi grandes que la lettre A. En leur demandant de combien, elles nous ont déclaré que c'était d'un 1/3.

Nous les avons félicitées, car nous leur avons fait observer que, nous-mêmes, calculions le grossissement par la formule :

$$G = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

Remarquons que nous étant placé à la *vision distincte minima* du presbyte, nous étions certain que les lettres *visées à l'œil nu* et *celles grossies* par la loupe, étaient *exactement dans le même plan.*

Le simple bon sens avait donc permis aux personnes les plus étrangères aux sciences, de mesurer le grossissement que l'on observe avec les lentilles à long foyer.

En même temps elle leur donnait, sans qu'elles s'en doutassent, la définition même du grossissement tel qu'on l'obtient avec la lunette astronomique.

La lettre E, mesurée par rapport à A, n'était autre chose que la tangente de la moitié de l'angle sous lequel on visait cette lettre et la lettre N (dimension de la lettre E avant le grossissement), la tangente de la moitié de l'angle sous lequel on visait cette lettre sans lentille. Les lettres E et N *étant à la même distance de l'œil.*

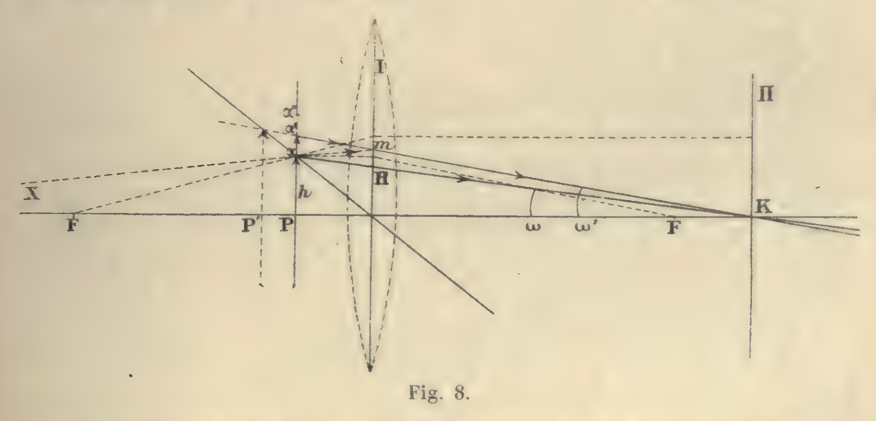


Fig. 8.

Sans recourir à la figure 6 pour cette loupe à long foyer, on peut en simplifiant, remarquer qu'à cette distance de 30 à 40 centimètres, tous les rayons incidents venus soit de l'objet, soit de l'objet grossi, peuvent être considérés comme tombant normalement sur l'œil et, par suite, passent par le point nodal K, et comme on est à la vision distincte minima font leur image sur la choroïde. En représentant par des lignes pointillées les rayons qui traversent la loupe, on voit que l'on a la figure ci-dessus (*fig.* 8).

Le rayon αm qui, après réfraction, vient passer par K, est vu sous le même angle visuel que le rayon venu de α' suivant mK dans l'air.

Le grossissement est donc exprimé par le rapport $\frac{\alpha' P}{\alpha P} = \frac{\text{tang}\ \omega'}{\text{tang}\ \omega}$.

αP est dans notre précédente figure 7 la lettre N et α'B la lettre A de même dimension que E grossi.

La construction ci-dessus est en outre conforme à ce que nous donnait notre formule générale. En effet :

$$\delta = f\frac{e' - \delta'}{f + \delta'}$$

devient quand δ', c'est-à-dire la distance de la choroïde au point nodal qui est de 15^{mm},1234, est négligeable par rapport à f :

$$\delta = e' - \delta'$$

c'est-à-dire que le système mixte III coïncide avec II.

Cette figure nous permet ensuite de démontrer l'inexactitude de la construction de l'image virtuelle de la loupe obéissant à la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

En effet, l'image visée aurait été en P$'$, ce qui est inexact, puisque nous nous sommes placé au minimum de la vision distincte en P où se trouve par suite, nécessairement, l'objet grossi. De plus, on ne peut avoir $p = p'$ que pour une *seule* position $p = \frac{f}{2}$. Or, nous aurons une série de grossissements correspondants à des valeurs variables de p, et pour lesquelles αP et α'P sont dans le même plan.

Remarquons encore, qu'en prenant un presbyte dont le *punctum proximum* serait précisément égal à FK, l'écart entre la valeur de p' et p irait en augmentant et que, pour p voisin de F, p' serait voisin de l'infini. Alors qu'au contraire l'objet grossi Pα' serait toujours à la vision distincte minima avec Pα.

Il aurait donc suffi aux auteurs d'étudier les loupes à long foyer, pour des objets placés à la vision distincte minima des observateurs, pour se convaincre que leur construction des images virtuelles ne donnait nullement l'image de vision, puisqu'une règle placée où était l'image virtuelle ne faisait pas son image sur la choroïde, quand l'œil était accommodé pour la vision distincte minima où était l'objet.

Il est maintenant facile de calculer le grossissement réel de la loupe en fonction de la distance Δ de la vision distincte minima (*fig.* 8).

Le rayon αm qui, après réfraction dans I, vient passer par le point nodal K de l'œil, semble venir d'un point X situé à une distance x de I, telle que :

$$(c) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{\delta} = \frac{1}{f},$$

sachant que $e' - \delta' = \delta$, quand III coïncide avec II.

On a encore :

$$\frac{x-p}{h}=\frac{x}{H}, \quad h=(\delta+p)\operatorname{tang}\omega, \quad H=\delta\operatorname{tang}\omega',$$

d'où, ayant $p+\delta=\Delta$:

$$(d) \qquad G=\frac{\operatorname{tang}\omega'}{\operatorname{tang}\omega}=\frac{\Delta}{\Delta-p}\frac{x}{x-p}.$$

La distance à la loupe p, à laquelle l'objet est placé pour donner image exactement sur la choroïde quand l'œil (point nodal K) est à une distance $(e'-\delta')=\delta$ de celle-ci, étant connue en fonction de f, Δ et $e'-\delta'$ par la relation (b) qui devient ici, en négligeant δ' par rapport à f et remplaçant $e'-\delta'$, ainsi que e par δ, savoir :

$$(b') \qquad p=f\frac{\delta}{\frac{h}{h_1}(f+\delta)-f}$$

où $\frac{h}{h_1}=\frac{\Delta}{\Delta-\delta}$, δ représentant en même temps ici la distance de la loupe au centre nodal de l'œil.

Les relations (c), (d), (b') sont donc celles qui conviennent aux loupes à long foyer, quand l'objet est exactement placé à la vision minima Δ de l'observateur, et que la distance de la loupe à celui-ci est représentée par δ.

On obtient ainsi le *grossissement réel de la loupe* en fonction de ces trois éléments Δ, δ, f.

Pour un même observateur, le grossissement variera avec la valeur de δ, comme l'expérience le montre.

Pour $\delta=\Delta$, loupe en contact avec l'objet, on a $\frac{h}{h_1}=\infty$, d'où $p=o$ et par suite :

$$\delta=\Delta, \qquad G=1, \qquad \omega'=\omega \qquad \text{pas de grossissement}$$

Pour $\delta=f$ le rapport $\frac{x}{x-p}=1$ et l'on a :

$$(e) \qquad G=\frac{\Delta}{\Delta-p_1} \qquad \text{grossissement maximum}$$

Puis δ continuant à diminuer, $\frac{h}{h_1}$ tend vers 1 et p vers f, le coefficient

$\frac{\Delta}{\Delta - p}$ tend vers une valeur minima $\frac{\Delta}{\Delta - f}$, mais $\frac{x}{x - p}$ tend vers zéro, donc le grossissement, après avoir atteint une valeur maximum, décroit.

Nos formules expliquent donc tout ce que l'on observe avec la loupe à long foyer.

On pourrait donc prendre comme mesure du grossissement de la loupe à long foyer, le grossissement *maximum* représenté par la formule (*e*), dans laquelle p_1 est déterminé par les relations :

$$p_1 = f \frac{f}{\frac{h}{h_1} 2f - f} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_1} = \frac{\Delta}{\Delta - f}$$

qui donnent :

$$(f) \qquad p_1 = f \frac{\Delta - f}{\Delta + f}.$$

En tous les cas, les formules (*e*) et (*f*) représentent pour $\delta = f$ un grossissement *réel* de la loupe, puisque l'œil n'intervient en quoique ce soit pour modifier ce grossissement, l'objet étant placé à la vision distincte minima Δ de l'observateur.

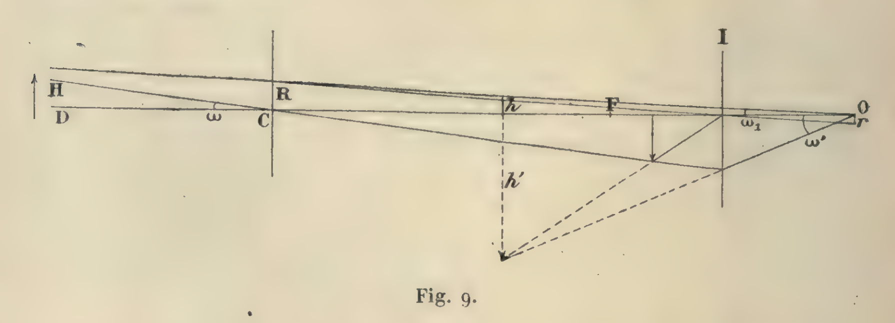


Fig. 9.

Si nous nous reportons à la définition du grossissement telle qu'on la donne dans la lunette astronomique, en négligeant provisoirement, comme les auteurs, toutes les propriétés de l'œil et admettant, ce qui est inexact comme nous l'avons vu plus haut, que l'image virtuelle de l'oculaire fut l'image de vision, on a la figure classique (*fig.* 9) qui représente la marche des rayons quand l'œil est en O supposé dans le plan de l'anneau oculaire.

Le grossissement est alors représenté pour les auteurs par les formules :

$$G = \frac{\tang \omega'}{\tang \omega_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\tang \omega'}{\tang \omega},$$

quand l'objet est très éloigné. Et l'on définit ainsi ω' et ω_1.

L'angle ω' est l'angle sous lequel l'observateur O voit l'objet agrandi à sa vision distincte minima, l'angle ω_1 est l'angle sous lequel il verrait sans lentille l'objet lui-même.

Si l'on nomme Δ la distance de la vision distincte minima où l'on suppose placée l'image *de vision* h', D la distance de l'objet de grandeur H à l'observateur O on a :

$$h = \Delta \operatorname{tang} \omega_1 \qquad h' = \Delta \operatorname{tang} \omega'$$

d'où :

$$G = \frac{h'}{h} = \frac{h'}{H}\frac{D}{\Delta}.$$

Si nous comparons cette définition du grossissement à celle à laquelle nous étions forcément conduit avec la loupe à long foyer, on voit que la définition est rigoureusement la même. Nous reviendrons plus tard sur le véritable grossissement de la lunette astronomique, quand on ne néglige pas la réfraction de l'œil et le rôle physiologique de la rétine.

Mais ce qui est extraordinaire, c'est que les auteurs ayant défini le grossissement dans la lunette astronomique, ne se soient pas demandé pourquoi il était totalement différent de celui qu'ils donnaient dans la loupe.

Pourquoi, et avec raison, parce que ceci aurait été grotesque, ils n'ont pas eu l'idée de ramener l'objet placé *au-delà* de la vision distincte minima *en grandeur* à la vision distincte minima où se trouve l'image de vision, comme ils le font quand l'objet est *en deçà* de la vision distincte.

Ceci nous amène à étudier les oculaires à court foyer et à montrer qu'il existait *deux grossissements*, le grossissement *apparent* tel que les auteurs le mesurent, tel qu'ils le définissent, qui *diffère peu* du grossissement que l'œil *sans loupe* mesurerait, et le grossissement *réel* de la loupe, tel qu'on le définit dans la lunette astronomique, tel que nous l'avons défini et mesuré avec les loupes à long foyer.

L'erreur de tous les auteurs est d'avoir cru que dans les lentilles à court foyer, le grossissement *apparent* mesurait et représentait le grossissement *réel* de la loupe, alors qu'il n'en donnait aucune idée. C'est ce que nous allons montrer maintenant.

III. — Grossissements des loupes a court foyer

Grossissement apparent et grossissement réel de la loupe.

Avant d'aborder la théorie des loupes à court foyer, il convient de rappeler en commençant ce qui était enseigné jusqu'ici, de reproduire la figure classique conforme à la théorie et la définition donnée du *grossissement*, car on n'avait jamais eu l'idée que le grossissement représenté et mesuré ne représentait pas le grossissement réel de la loupe.

Voici la figure classique qui se trouve dans *tous les ouvrages* (Ganot-Maneuvrier, 20e édition, *Opt.*, p. 694, *fig.* 567 ; Daguin, p. 1611, *Opt.*, p. 350, 2e édit. : Verdet, *Cours de physique*, t. II, *Opt.*, p. 214, *fig.* 388).

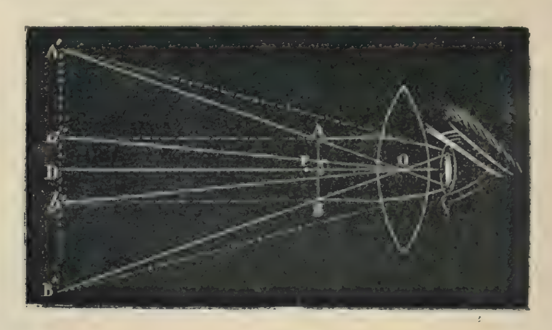


Fig. 10.

Et le grossissement est ainsi défini (Ganot-Maneuvrier, p. 694). « On appelle grossissement le rapport du diamètre apparent de l'image au diamètre apparent de l'objet, supposés l'un et l'autre à la distance minimum de la vue distincte ». Et pour qu'il n'y ait pas d'erreur sur la définition, l'objet AB dans la figure 567 de Ganot est transporté en GRANDEUR en *a'b'*.

Verdet définit ainsi (*id. ibid.*, p. 214) de son côté le grossissement.

« On appelle, en général, *grossissement* d'un instrument d'optique le rapport entre le diamètre apparent de l'image et celui de l'objet, l'*objet étant* SUPPOSÉ *placé dans les conditions ordinaires de la contemplation directe.* »

L'auteur complète ainsi sa pensée.

« Or, les objets qu'on examine à la loupe sont du nombre de ceux dont on peut faire varier à volonté la distance à l'œil. Aussi, lorsqu'on veut les

regarder directement, *on les place à une distance compatible avec la vision distincte*, et généralement, afin d'en mieux voir les détails, à la limite inférieure de la distinction distincte. Pour la même raison, quand on regarde ces objets à la loupe, on leur donne une position telle, que leur image soit éloignée de l'œil d'une quantité égale à cette limite inférieure. »

Cette dernière phase indique nettement que pour tous les auteurs l'image virtuelle de construction sera une image de vision. Voici la fin où l'auteur montre, comme Ganot, que l'objet ou l'image sont transportés *en grandeur* à la vision distincte.

« L'image vue à la loupe étant ainsi à la même distance de l'œil que l'objet vu directement, le rapport de leurs diamètres apparents dans ces deux conditions est égal au rapport de leurs dimensions linéaires A'B', AB, ou au rapport $\frac{OD}{OC}$, on a donc en représentant la distance OC par p, et la distance OD par p',

$$G = \frac{p'}{p}. »$$

« Le grossissement est donc sensiblement égal au rapport de la distance de la vision distincte Δ à la distance focale principale (f) de la lentille. Il sera d'autant plus grand que la lentille aura un foyer plus court et que la vue de l'observateur sera plus longue. » (Daguin, *id. ib.*, p. 351.)

Maintenant pour vérifier cette formule théorique, car il n'y a pas de bonne théorie sans une vérification pratique, voici comment l'on opère, dans le cas des lentilles à court foyer.

On place un papier à la vision distincte et, avec une chambre claire, on trace sur ce papier l'image virtuelle A'B'. Par exemple, si AB représentant deux divisions consécutives d'un micromètre oculaire, c'est-à-dire 1/10 de millimètre, et que A'B' fût trouvé égal à 1 millimètre, on en conclut que le grossissement de la loupe était égal à 10, d'après la formule générale expérimentale

B) $$\frac{n^{mm}}{10} \times G = N^{mm}$$

n étant le nombre de divisions du micromètre oculaire, N le nombre de millimètres de l'image virtuelle.

De quel grossissement voulait parler Daguin ? Il n'en dit rien, mais évidemment ce ne pouvait être du grossissement *réel* de la loupe, puisqu'il écrit expressément : « le grossissement sera d'autant plus grand que la vue de l'observateur sera plus longue ».

Le grossissement (?) de la loupe est alors mesuré pour d'autres auteurs

en adoptant pour vision distincte le chiffre moyen $0^m,220$; mais ici nouvelle difficulté de faire concorder ce nombre avec l'expérience de Ch. Robin. Voici, en effet, ce que l'on trouve dans le *Cours de manipulations*, de A. Witz (1re édit.), p. 367.

« On enseigne généralement que, par un acte de perception se passant dans les centres nerveux, l'image est à la distance qu'on dit être celle de la vision distincte. Il est facile de s'assurer par expérience que cette assertion n'est pas exacte ; ainsi que Ch. Robin l'a démontré, plus le pouvoir amplifiant est considérable, plus l'image est reportée loin, sans jamais atteindre toutefois la distance de la vision distincte. Ce fait a une grande importance, car il explique les erreurs énormes auxquelles on est conduit quand on accepte pour *grossissement d'une loupe* le quotient de la vision distincte prise égale à $0^m,220$ par la longueur focale. »

Puis l'auteur cite les nombres de Ch. Robin :

Pouvoir amplifiant	Dimensions de l'image dans le microscope	Distance à laquelle le dessin est vu avec les mêmes indications
100	$9^{mm},5$	120^{mm}
200	19	125
400	38	135

Il ajoute : « Avec un grossissement de 1 500 diamètres, le plus fort qu'on ait pu atteindre réellement, la distance est encore moindre que 220 millimètres, quel que soit le point de vision distincte des individus ; il est donc bien vrai que l'image n'est pas reportée à la distance du *punctum proximum*. Nous en conclurons que la détermination du grossissement par le procédé de la double vue et à l'aide de la chambre claire est inexacte, lorsqu'on place son papier à 220 millimètres, comme le prescrivent quelques traités ; c'est ainsi qu'on a pu trouver ces amplifications fantastiques de 3 000 diamètres. La chambre claire ne doit servir qu'à reproduire par le dessin des objets que l'observateur se reconnaît incapable de dessiner à main levée. »

Ainsi nous assistons à ce curieux spectacle que les auteurs définissent le grossissement par la vision distincte minima des observateurs qui varie énormément du myope au presbyte, alors que la distance de l'objet visé varie peu, et que ne sachant plus comment s'en tirer pour calculer le grossissement de la loupe, ils ont admis que pour le mesurer la règle divisée serait placée à la vision moyenne $0^m,220$. Il en résulte que, pratiquement, la *vision nette de la règle divisée* était sacrifiée à la *vision nette de l'objet*. C'est, du reste, ce que l'on constatait dans la pratique, alors que l'on ne

savait pas au juste ce que l'on mesurait. La première conséquence de ce fait est que l'observateur infiniment presbyte pour voir nettement le micromètre oculaire le plaçait exactement au foyer principal de l'oculaire. Donc la règle divisée n'était pas en coïncidence avec l'image virtuelle de l'oculaire, qui était à l'infini. Même, si l'on eût placé la règle divisée au *punctum proximum* du presbyte assez éloigné pour que l'image de la règle pût être considérée comme se faisant aussi sur la choroïde de l'observateur infiniment presbyte, on voit que l'on pouvait en conclure dès le commencement que toute la théorie des images virtuelles était fausse.

On en aurait trouvé dès l'origine la raison, puisque dans le système oculaire-cristallin il n'y avait pas formation d'images virtuelles, dont on ne devait pas dire un seul mot dans la théorie de la loupe, puisque *sans cristallin pas de vision*, et que l'addition du cristallin à l'oculaire supprimait les images virtuelles.

Mais en dehors de ce fait, si les auteurs s'étaient occupés du grossissement à l'œil nu, ils auraient, de suite, constaté, comme nous l'avons montré dans l'avant-propos, que la formule du grossissement était précisément celle qu'ils avaient donnée pour la loupe, et rapprochant ce fait des nombres *totalement différents* que l'on obtient lorsqu'on se place exactement et à la *vision distincte de l'objet vu à travers la loupe* et à la vision distincte minima de la règle visée à l'*œil nu*, ils en auraient conclu que les nombres ainsi obtenus étaient des grossissements *apparents* qui n'avaient aucun rapport avec le grossissement *réel* de la loupe, grossissement défini, du reste, d'une toute autre manière, soit dans la lunette astronomique, soit dans les loupes à long foyer.

C'est ce que nous avons fait pour la première fois et nous sommes ainsi arrivé à mettre tous les observateurs d'accord et à ne pas rejeter l'emploi de la chambre claire. Nous avons montré que les différents nombres obtenus par les procédés actuels devaient être multipliés par le rapport $\frac{\varpi}{\Delta}$, ϖ étant la distance de l'objet vu *très distinctement* au point nodal, Δ la distance de la règle divisée au même point nodal, et placée à la vision *distincte* de l'observateur, vision distincte qui varie de $0^m,500$ à $0^m,120$ du presbyte au myope. On obtenait ainsi le grossissement *réel* de la loupe, et les nombres étaient concordants pour différents observateurs s'étant placés dans les meilleures conditions d'observation.

Mais avant d'aborder ce point une dernière critique restait à faire dans la manière dont les auteurs avaient établi leur formule de grossissement. Nous avons vu qu'ils étaient arrivés à la relation :

$$G = \frac{p'}{p}.$$

Or, ils n'ont pu l'obtenir, comme la figure 10 le montre, qu'en supposant *pour simplifier* l'observateur en O. Cette simplification était *grotesque*, car elle supprimait purement et simplement la *lentille*. Ce que l'on obtenait ainsi c'était le grossissement à l'*œil nu*. En effet, p' était égal à Δ, et quant à p, il ne pouvait point être supposé égal à f, pour un observateur accommodé pour voir *nettement à la fois* à la distance p à travers la loupe et à la distance Δ à l'œil nu. Donc, les *éléments de la loupe n'entraient pas* et *ne pouvaient entrer* dans cette expression du grossissement quand l'observateur était supposé en O.

Par conséquent, la formule des auteurs donnait le grossissement (trouble) à l'*œil nu*, mais ni le grossissement *apparent* (net) *de la loupe*, ni le grossissement *réel*. On ne pouvait calculer le grossissement d'une lentille avec des rayons passant par le centre optique de celle-ci *sans déviation*. On voit ce que valait cette prétendue théorie de la loupe, dont l'incohérence le disputait à l'absurde.

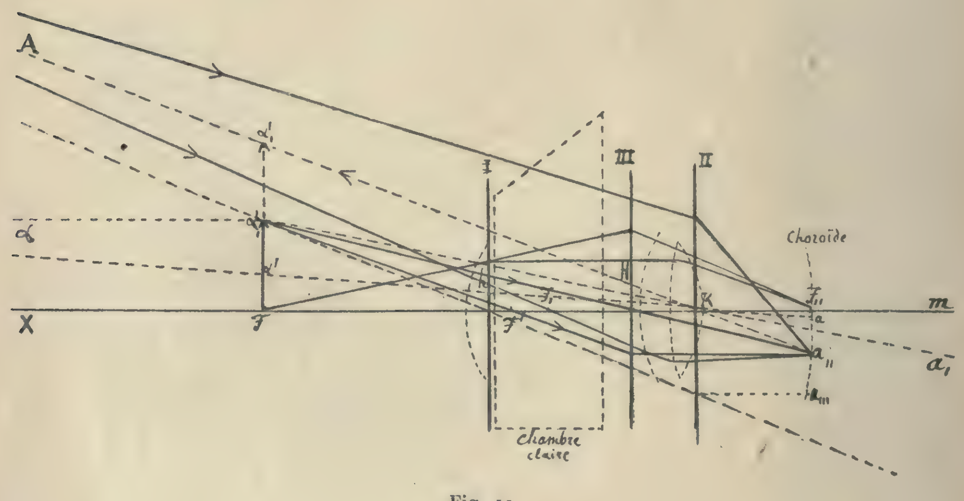


Fig. 11.

Nous avons précédemment étudié le rôle de la loupe comme lentille ramenant sur la choroïde l'image de l'objet qui, à l'œil nu, se ferait au-delà de cet écran, il s'agit maintenant de compléter la figure 6 de manière à montrer la loupe agissant comme verre grossissant. Il s'agit de différencier son grossissement apparent essentiellement variable avec les observateurs de son grossissement réel qui caractérisera la loupe si les expérimentateurs obtiennent tous sensiblement le même nombre.

La figure 11 suppose que l'observateur est infiniment presbyte, c'est-à-

dire que pour voir très distinctement l'objet il le place exactement en F au foyer principal de l'oculaire. L'observateur est supposé placé dans les conditions où, à l'aide de la chambre claire, on reportera sur le papier, à la vision distincte à l'œil nu la plus favorable, l'image $F_{''}a_{''}$ de l'objet faite sur la choroïde.

En admettant que la chambre claire eût 15 millimètres d'épaisseur et que la cornée, à cause des cils et paupière, fût à 5 millimètres de celle-ci, la distance de $F_{''}$ à la cornée transparente étant égale à $4^{mm} + 4^{mm} + 14^{mm},647 = 22^{mm},647$, la distance du fond de l'œil à l'oculaire I était égale à $22^{mm},647 + 20^{mm} = 42^{mm},647 = e'$. D'un autre côté, la loupe était supposée avoir une distance focale F égale à 30 millimètres, par conséquent, le centre optique du système III que nous substituons à l'oculaire et au cristallin était à une distance de l'oculaire δ donnée comme nous l'avons vu par la formule

$$\delta = f\frac{e' - \delta'}{f + \delta} = 30\,\frac{42{,}6 - 14{,}1}{30 + 14{,}1} = 19^{mm},3$$

Ayant δ, on déduisait f' par la relation

$$\frac{1}{f + \delta} + \frac{1}{e' - \delta} = \frac{1}{f'}$$

et l'on a calculé

$$f' = 15{,}9.$$

Ayant ainsi déterminé F′ et III on a pu alors tracer sur la choroïde l'image de $\alpha_1'F$ dans le système I-II, c'est-à-dire dans les conditions de la vision nette, pour un observateur infiniment presbyte.

Si l'observateur eût été moins presbyte, l'objet aurait été placé comme dans la figure 6, un peu en deçà de F. La construction eût été la même, seule la valeur de f' eût varié.

Si donc l'objet eût été placé comme dans la figure 6 pour la vision minima du presbyte (*punctum proximum*) en plaçant une règle divisée à cette distance et la regardant en même temps, grâce à la chambre claire, que l'objet, l'*image des deux* se ferait exactement sur la choroïde. Mais la vue des objets éloignés se fait suivant les *lignes de direction de la vision*, tels que $AKa_{''}$, $XKa_{''}$, par conséquent si l'observateur voulait reporter l'image $a_{''}$ du point α_1 sur une règle divisée placée en XA, il devait reporter l'impression lumineuse dans la direction $a_{''}KA$, *suivant une ligne de direction de la vision* et non dans la direction $a''\alpha_1$, comme l'auraient fait les physiciens, en tenant compte de la réfraction de l'œil, car c'est en-

core la première erreur qu'ils commettent en enseignant dans leur figure 10 que l'image virtuelle, image obtenue à la vision distincte à l'aide d'une droite passant par le centre optique et l'objet, est une image de vision.

C'est par ignorance du rôle physiologique de la rétine qu'ils n'ont jamais figuré le point nodal K de l'œil, et qu'ils ont enseigné que si un objet α_1F faisait son image en $F_{\prime\prime}a_{\prime\prime}$ suivant les rayons $\alpha_1 a_{\prime\prime}$, $FF_{\prime\prime}$ l'angle visuel était celui formé par l'intersection de ces deux droites, alors que l'angle visuel était égal à AKF. Or, dans la détermination du grossissement la position du point nodal était fondamentale, et jamais on ne le trouve figuré dans les Traités de physique. Si la rétine n'eût pas existé, la choroïde se serait bien trouvé, en effet, à l'entrecroisement des rayons servant à la construction de l'image $F_{\prime\prime}a_{\prime\prime}$ de l'objet $F\alpha_1$. Mais l'impression que reçoit le cerveau des objets extérieurs étant persistante, et celle-ci se faisant suivant les droites AK, XK, il en résulte que toute impression reçue suivant $F_{\prime\prime}a_{\prime\prime}$ est reportée par le cerveau aux impressions antérieures dues aux objets extérieurs. C'est pour cela que les physiologistes enseignent qu'un rayon incident $\alpha_1 a_{\prime\prime}$ est reporté dans la direction $a_{\prime\prime}$KA. On ne pouvait donc pas parler du grossissement des objets sans rappeler avant tout le rôle physiologique de la rétine, et sans tracer avant tout le point nodal de l'œil, aussi important que le centre optique de la loupe.

Grossissement apparent de la loupe.

Le point $\alpha_\prime$ faisant son image en $\alpha_{\prime\prime}$ et le point A à la vision distincte à l'œil nu faisant aussi son image en $a_{\prime\prime}$, le cerveau reporte donc $\alpha_\prime$ en A. De même F faisant son image en $F_{\prime\prime}$ comme X à l'œil nu, il reporte $F_{\prime\prime}$ en X. Par conséquent, les choses se passent comme si α_1F occupait la longueur AX, et par suite paraît agrandi. Le grossissement que nous nommerons *apparent* est donné par la formule :

$$G' = \frac{AX}{\alpha_1 F} = \frac{F_{\prime\prime}a_{\prime\prime}}{F_{\prime\prime}a} = \frac{F\alpha_1'}{F\alpha'},$$

Si l'on remarque que $F_{\prime\prime}a$ serait l'image de $F\alpha_1$ placé en $X\alpha$ à la vision distincte à l'œil nu, il est facile de justifier que ce grossissement n'est qu'*apparent* et essentiellement variable avec les observateurs.

En effet, pour un autre observateur, l'objet devra être placé un peu en dedans de F pour être vu distinctement (*fig.* 6). Or, dans ces conditions on peut admettre que $F_{\prime\prime}a_{\prime\prime}$ reste sensiblement le même.

Au contraire, la vision distincte changeant considérablement d'un ob-

servateur à un autre, la grandeur de $F_{''}a$ sera essentiellement variable et l'on aura très sensiblement pour les grossissements *apparents* de différents observateurs :

$$G'' = \frac{F_{''}a_{''}}{F_{''}a'} = \frac{F\alpha'_1}{F\alpha''}, \qquad G''' = \frac{F_{''}a_{''}}{F_{''}a''} = \frac{F\alpha'_1}{F\alpha'''}, \ldots$$

Ainsi dans les grossissements *apparents* de la loupe, on peut considérer $F\alpha'_1$ comme sensiblement constant, exactement comme lorsque les auteurs représentaient par $\frac{\Delta}{f}$ le grossissement, ils supposaient en réalité sensiblement constante et égale à f la distance de l'objet à l'oculaire ; mais au contraire, $F\alpha'$ était essentiellement variable comme Δ.

Grossissement réel de la loupe.

L'objet $\alpha_1 F$ étant vu *distinctement à la loupe*, et AX pouvant être considéré comme l'image dans le cerveau de cet objet qui, vu agrandi, est comme superposé à AX, nous définissons le grossissement réel de la loupe comme dans la lunette astronomique, d'après l'angle AKX sous lequel on viserait l'objet *en place*. On voit que le grossissement *réel* sera donné par la relation :

$$G = \frac{F\alpha'_1}{F\alpha_1} = \frac{\text{tang AKX}}{\text{tang } \alpha_1 \text{KF}}.$$

Or, comme nous venons de voir dans le grossissement apparent que $F\alpha'_1$ est sensiblement constant d'un observateur à un autre, on voit que le grossissement ainsi déterminé est sensiblement *une constante* et, par suite, que c'est lui seul qui détermine le véritable grossissement de la loupe.

Si l'on désigne par ϖ la distance de l'objet vu distinctement à la loupe au point nodal K de l'œil, Δ la distance au même point nodal de la règle divisée, vue distinctement à l'œil nu *entre* le *punctum proximum* et *remotum* on a :

$$\frac{\varpi}{F\alpha'_1} = \frac{\Delta}{AX} \qquad \text{d'où} \qquad F\alpha'_1 = AX\frac{\varpi}{\Delta}.$$

Par suite :

$$G = \frac{AX}{F\alpha_1}\frac{\varpi}{\Delta},$$

telle est la formule fondamentale qui nous donnera le grossissement *réel* de la loupe.

Dans cette formule AX est mesuré là où l'on veut, entre le *punctum*

proximum et le *punctum remotum*. Comme $\frac{AX}{\Delta}$ est une constante pour un même observateur, on voit que celui-ci peut varier ses efforts d'accommodation, pour viser la règle dans différentes positions, il arrivera toujours au même grossissement. D'un observateur à un autre, $\frac{AX}{\Delta}\varpi$ peut ne pas être très différent. Dans les manipulations, ce sera précisément ce que l'on devra déterminer avec soin.

Nous avons donc fait disparaître dans les loupes à court foyer toutes les anomalies qui s'y rencontraient, en montrant qu'il existait en réalité deux grossissements ; ce que l'on avait mesuré jusqu'ici n'était que le grossissement apparent nécessairement variable avec les observateurs. Il ne donnait aucune idée du grossissement réel de la loupe.

IV. — Grossissement réel de la lunette astronomique

Si nous nous rapportons à notre figure 10 de la lunette astronomique, que nous nommions L la distance de l'objectif à l'oculaire, l la distance du plan de l'anneau oculaire à la loupe, le centre de cet anneau est défini comme étant le point par lequel les rayons passant par le centre optique de l'objectif viennent converger sur l'axe principal après s'être réfracté dans l'oculaire de distance focale f, on a donc

$$\frac{1}{L}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f},$$

d'où :

$$l=f\frac{L}{L-f}.$$

Les auteurs enseignent que c'est dans le plan de l'anneau oculaire qu'un observateur doit se placer pour voir le plus nettement possible l'objet visé. Le grossissement est représenté par :

$$G=\frac{\text{tang}\,\omega'}{\text{tang}\,\omega_1}.$$

Si l'objet est très éloigné et l'observateur en O, on a d'après la figure pour le grossissement

$$G=\frac{\text{tang}\,\omega'}{\text{tang}\,\omega}=\frac{L-l}{l}=\frac{R}{r},$$

R étant le rayon de l'objectif, r celui de l'anneau oculaire. Cette relation représente donc le grossissement de la lunette astronomique.

On voit que dans cette manière de faire on n'a tenu aucun compte de la réfraction de l'œil de l'observateur.

De plus, en admettant que les rayons qui passent par le centre de l'anneau oculaire viennent frapper la rétine et sont vus *dans la direction même et contraire de leur incidence*, on admet *nécessairement*, si ω' est l'*angle visuel* de l'objet agrandi, que le point nodal K de l'observateur se trouvait précisément au centre de l'anneau oculaire. C'est dans ces conditions seulement que les rayons incidents peuvent être considérés comme normaux à l'œil réduit de Listing et passant par le centre nodal sans déviation pour aller faire image sur la choroïde avant d'impressionner la rétine.

Or, dans l'étude des loupes à long foyer, nous avons vu que c'était uniquement quand l'objet visé était à la vision distincte minima de l'observateur que le système III qui doit être substitué à l'oculaire I et au cristallin II, est en coïncidence avec II. Dans ces conditions seulement, le foyer principal F' du système III coïncide avec le premier foyer principal F_1 de l'œil et les rayons venus d'un point de l'objet visé et passant : 1° par ce foyer principal, 2° par le point nodal, viennent après réfraction pour les premiers se rencontrer sur la choroïde où ils donnent une image de ce point.

Or, dans la figure des auteurs l'image de l'objet agrandi est bien au delà de l'image renversée que l'objet vise à travers l'oculaire. Il en résulte donc que par cela seul qu'ils figuraient l'image renversée de l'objet non à la vision distincte de l'observateur, ils ne pouvaient supposer les rayons réfractés par l'oculaire et le cristallin passant par le centre nodal en O et par suite que tout était faux dans leur construction, l'angle visuel n'étant nullement l'angle de construction, comme nous l'avons plusieurs fois indiqué.

Mais la figure des auteurs pouvait être fausse, par suite de l'ignorance de ces considérations, sans que le mode d'observation le fût.

Par exemple, supposons que l'oculaire eût une longueur focale telle que la relation :

$$2f = \Delta,$$

se vérifiât. Si l'observateur était un myope pour lequel $\Delta = 120$ millimètres, il aurait suffi que la distance focale principale de l'oculaire fût de 6 centimètres, pour que le point nodal de l'observateur fût au centre de l'anneau oculaire en même temps que III était en coïncidence avec II et par conséquent que l'image de l'image renversée se fît exactement sur la choroïde et que l'angle ω' fût l'angle visuel. Il n'y aurait donc alors qu'à corriger la figure des auteurs en plaçant l'*image de vision là où est l'image renversée.*

En effet, si l'on remarque, quand la lunette est suffisamment longue, c'est-à-dire f négligeable par rapport à L, que $l = f$ et d'un autre côté l'image renversée peu éloignée comme toujours du foyer principal de l'oculaire, on voit que $2f$ représente sensiblement la distance de l'image renversée au point nodal de l'œil.

C'est dans ces conditions seulement que le grossissement apparent est égal au grossissement de la lunette, et que celui-ci peut être représenté par $\frac{R}{r}$.

Mais dans la pratique l'observateur tend à se placer tout contre l'oculaire. C'est-à-dire que le point nodal de l'œil se trouverait environ à 20^{mm} au minimum de l'oculaire, il en résulte donc que pour se trouver dans le plan de l'anneau oculaire, tout en étant près de l'oculaire, la distance focale principale doit être au plus de 3 à 4 centimètres, autrement dit que l'on est dans les conditions des oculaires à court foyer. Or, il s'agit de savoir si pour de tels oculaires le point nodal K étant à une distance égale à f, un observateur infiniment presbyte, l'image de l'objet se faisant exactement sur la choroïde, ou si l'image de l'objet se faisant sur la choroïde K est ou non en coïncidence avec le point à cette distance f de l'oculaire.

Si nous nous reportons aux formules (a) et (b), savoir :

$$\delta = f\frac{e' - \delta'}{f + \delta'}, \qquad p = f\frac{e' - \delta'}{\frac{h}{h_1}(f + e') - (f + \delta')},$$

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\Delta}{\Delta - (e' - \delta')},$$

formules qui donnent les valeurs de δ et p quand l'image de l'objet se fait exactement sur la choroïde dans les oculaires à court foyer, on voit qu'à moins de supposer que l'on ait :

$$f = 20^{mm}$$

on obtiendra toujours

$$e' - \delta' < f,$$

quand l'observateur regardera comme dans la pratique l'œil tout contre l'oculaire.

Mais supposons en outre, ce qui est l'hypothèse des auteurs quand ils veulent déterminer le grossissemeut de la lunette astronomique, que l'objet soit infiniment éloigné, de manière que l'image renversée se fasse au foyer principal de l'objectif, il n'y a qu'un observateur *infiniment presbyte* qui

pourra voir nettement l'objet à l'œil nu, et l'image renversée, pour être vue aussi nettement à travers la loupe, devra être placée au foyer principal de celle-ci. On aura donc pour la longueur de la lunette :

$$L = \Phi + f,$$

et l'on est dans les conditions de la figure 2.

C'est-à dire que l'observateur infiniment presbyte pourra être placé à une distance quelconque de l'oculaire et voir très nettement l'image renversée placée au foyer principal de l'oculaire.

Par conséquent, si nous supposons le point nodal soit en deçà de l'anneau oculaire, soit dans le plan de cet anneau, la formule :

$$\delta = f\frac{e' - \delta'}{f + \delta'},$$

donnera pour δ (distance de III à I) une valeur plus petite que f tant que $e' - \delta' = f$ et même pour $e' - \delta = f$.

Nous allons supposer $e' - \delta = f$, c'est-à-dire que le point nodal est dans le plan de l'anneau oculaire.

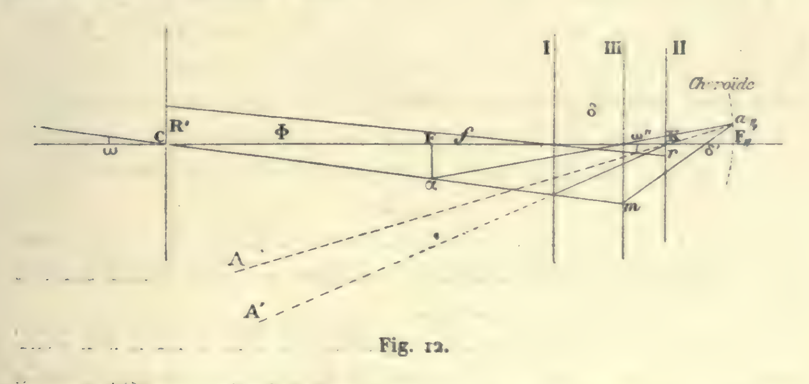


Fig. 12.

Pour nous rendre compte de la valeur de δ, supposons $f = 30$ millimètres, on voit, δ' étant égal à 15 millimètres, que

$$\delta = f.\ \frac{3}{4{,}5} = 0{,}66\ f.$$

C'est avec ce nombre que nous construisons notre figure 12 qui remplacera celle (*fig.* 9) de la lunette astronomique.

Alors que le point K de l'anneau oculaire, foyer conjugué de C, était déterminé dans le système I par la formule $\frac{1}{L} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$; dans le système

III, le foyer conjugué de C sera déterminé à une distance l' de III par la formule :

$$\frac{1}{L+\delta}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{f'}.$$

sachant d'un autre côté que :

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{f+\delta}+\frac{1}{e'-\delta},$$

quand l'objet placé au foyer principal de l'oculaire fait son image sur la choroïde.

On a donc :

$$\frac{1}{l'}=\frac{1}{f+\delta}+\frac{1}{e'-\delta}-\frac{1}{L+\delta}.$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$l'<e'-\delta \quad \text{et} \quad l'>f-\delta$$

c'est-à-dire que le foyer conjugué de C est compris entre K et $F_{''}$.

Du reste, un objet αF étant au foyer principal de l'oculaire fait chez un observateur infiniment presbyte son image sur la choroïde en $a_{''}F_{''}$, le point $a_{''}$ étant obtenu en menant la droite par α et le centre optique de III. Il en résulte bien que le rayon Cα qui vient aboutir en III après réfraction vient en $a_{''}$ et par suite que le foyer conjugué de C est compris entre K et $F_{''}$.

Donc les rayons $\alpha a_{''}$, αm... $m a_{''}$ qui forment l'image de α en $a_{''}$ sont tous reportés dans la direction $a_{''}$KA d'une ligne de vision et non suivant KA′ comme les auteurs l'enseignaient.

L'angle visuel de l'image renversée agrandie est donc CKA et non CKA′ comme les auteurs l'admettaient quand ils ne tenaient pas compte de la réfraction de l'œil. Or, comme il n'y a pas de vision sans cristallin, il était impossible de faire abstraction de cette lentille, dans le calcul du grossissement de la lunette astronomique.

Il nous est facile maintenant de procéder au calcul.

On a :

$$\frac{Fa}{F_{''}a_{''}}=\frac{f+\delta}{e'-\delta}$$

$$\text{tang}\,\omega''=\frac{F_{''}a_{''}}{\delta'}=\frac{Fa}{\delta'}\,\frac{e'-\delta}{f+\delta}$$

$$Fa=\Phi\,\text{tang}\,\omega$$

Donc :

$$G = \frac{\text{tang}\,\omega''}{\text{tang}\,\omega} = \frac{\Phi}{\delta'}\frac{e' - \delta}{f + \delta}$$

ayant toujours :

$$\delta = f\frac{e' - \delta'}{f + \delta'};$$

on en déduit :

$$\frac{1}{f + \delta} = \frac{1}{f}\frac{f + \delta'}{e' + f} = \frac{1}{f}\frac{f + \delta'}{f + 2\delta'},$$

d'où :

$$G = \frac{\Phi}{f}\frac{f + \delta'}{2f + \delta'}\frac{e' - \delta}{\delta'}.$$

Ici tout est connu.

Si l'on remarque que δ' peut être négligé par rapport à $2f$ et que $\varepsilon' - \delta$ diffère peu de δ, on voit que le grossissement est très approximativement représenté par la formule :

$$G = \frac{1}{2}\frac{\Phi}{f}\left(1 + \frac{\delta'}{f}\right)$$

et que les éléments de l'œil représentés par δ' entrent, comme c'était évident *à priori*, dans le calcul du grossissement

Or, les auteurs dans leur construction avaient représenté le grossissement comme nous l'avons vu par la formule :

$$G = \frac{R}{r}$$

comme on a $\frac{R}{r} = \frac{\Phi + f}{f}$ pour un objet très éloigné et un observateur infiniment presbyte ; ils avaient donc obtenu :

$$G = \frac{\Phi}{f}\left(1 + \frac{f}{\Phi}\right).$$

En admettant que le terme de correction $\left(1 + \frac{f}{\Phi}\right)$ fut de même ordre que le nôtre $\left(1 + \frac{\delta'}{f}\right)$, c'est-à-dire que δ' fut négligeable par rapport à f (oculaire à distance focale moyenne) comme f l'est par rapport à Φ, on voit qu'ils obtenaient avec leur construction un grossissement *double* de celui que l'on a réellement *quand le point nodal de l'observateur infiniment presbyte est dans le plan de l'anneau oculaire.*

Si la longueur focale de l'oculaire eût été de 30^{mm}, comme la distance

de la choroïde au point nodal, savoir $\delta' = 15^{mm}$, on voit que $\left(1 + \frac{\delta'}{f}\right)$ n'était plus négligeable et l'on aurait eu

$$G = \frac{3}{4} \frac{\Phi}{f}.$$

Ce n'est que pour un oculaire de 15^{mm} de longueur focale ; $f = \delta'$ que l'on retrouverait le grossissement des auteurs

$$G = \frac{\Phi}{f}.$$

Telle est la conséquence immédiate de l'oubli de la réfraction de l'œil et du rôle physiologique de la rétine dans le calcul du grossissement de la lunette astronomique.

On remarquera encore l'inconséquence de la figure des auteurs, supposant dans leur calcul du grossissement que les deux foyers de l'objectif et de l'oculaire sont en coïncidence, c'est-à-dire que c'est un observateur infiniment presbyte qui observe et plaçant l'image virtuelle tout près, au lieu de la supposer rejetée à l'infini.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

I. — Rappel des éléments et des propriétés de l'œil schématique

II. — Grossissement des loupes à long foyer

III. — Grossissement des loupes à court foyer

IV. — Grossissement réel dans la lunette astronomique

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie BUSSIÈRE.

THÉORIE NOUVELLE DE LA DISPERSION

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA DISPERSION

PAR

M. G. QUESNEVILLE

DOCTEUR ÈS SCIENCES

PROFESSEUR AGRÉGÉ A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHARMACIE

DIRECTEUR DU *Moniteur scientifique*

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

6 et 12, rue de la Sorbonne

—

1901

THÉORIE NOUVELLE DE LA DISPERSION

INTRODUCTION

> C'est pour avoir obéi à un sentiment d'asservissement que la science est restée rigoureusement stationnaire pendant les quinze premiers siècles de notre ère.
> Aristote avait dit : Cela suffisait.
> P. de Heen.

La dispersion est la décomposition de la lumière blanche en ses éléments les couleurs simples du spectre.

On l'obtient très facilement quand cette lumière passe d'un milieu plus réfringent dans un milieu moins réfringent ; on n'a jamais pu l'observer quand la lumière se propage dans un seul milieu. Dans le vide, qu'il s'agisse de l'observation de l'étoile Algol ou des éclipses des satellites de Jupiter, on doit conclure que, malgré ces espaces immenses traversés, les lumières simples ne se sont pas séparées comme elles l'auraient fait si elles s'étaient propagées à la manière de mobiles avec des vitesses différentes. Dans l'air, malgré le chemin considérable parcouru par la lumière blanche dans les expériences de la roue dentée, Fizeau et M. Cornu n'ont pas signalé la décomposition de la lumière blanche. En vain MM. Forbes et Young ont-ils cru, à une époque plus rapprochée (1882), pouvoir conclure à cette décomposition, comme le fait justement remarquer M. Mascart [1], leurs expériences ne donnent aucune certitude et « ne paraissent pas de nature à entraîner la conviction ». En résumé, deux méthodes expérimentales se rattachent à l'étude de la dispersion de la lumière blanche.

A ces deux méthodes expérimentales, on pourrait croire que correspondraient actuellement deux méthodes analytiques suivies dans la théorie mathématique de la dispersion. Or il n'en existe plus qu'une

[1] *Traité d'Optique*, t. III, p. 74.

dont la théorie de Cauchy, qui date de 1835, est le type. Elle se rattache à la seconde méthode expérimentale, celle dans laquelle on a été impuissant à démontrer l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples quand elles se propagent dans un seul milieu. De sorte que, si l'on arrivait à conclure à l'égalité des vitesses dans les milieux pondérables, comme dans le vide, il en résulterait qu'il n'existerait plus aucune théorie de la dispersion, puisque toutes, aujourd'hui, sont basées sur l'hypothèse de l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples dans un même milieu.

Il convient de signaler cependant que Lorentz avait essayé de s'affranchir de cette idée en montrant qu'il suffisait d'admettre une variation de la densité de l'éther de la surface à une certaine profondeur des corps pour expliquer la réfraction sans admettre l'inégalité de propagation des vitesses des lumières simples.

Cette hypothèse, regardée comme un article de foi depuis Newton jusqu'à l'heure actuelle, est, malgré cet essai de Lorentz, une vieille idée qui a survécu à la théorie de l'émission.

On peut dire qu'il n'y avait pas de théorie de l'émission sans l'hypothèse de l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples. La dispersion en était la conséquence immédiate.

Dans la théorie des ondulations nous voulons montrer que si la dispersion, dans un seul milieu, ne peut s'expliquer que par l'inégalité de propagation des lumières simples, il n'en est plus de même de celle qui accompagne la réfraction. Elle dépendra d'un tout autre phénomène.

En effet, nous montrerons que, si l'on admet l'égalité des vitesses dans le vide, on doit admettre cette égalité dans les milieux pondérables, que, seule, l'inégalité de propagation dans le vide entraînerait l'inégalité dans les milieux, si l'on veut regarder l'éther comme transmettant intégralement, dans un même milieu, les durées et les nombres des oscillations qui caractérisent les lumières.

Quant à l'absence de dispersion dans le vide, nous verrons qu'elle ne prouve nullement l'égalité des vitesses de propagation, mais l'impossibilité de constater leur inégalité. Elle sera, par contre, une preuve que c'est par ondes que le mouvement se propage, et non à la manière d'un mobile. Par conséquent, une théorie rationnelle de la dispersion par réfraction devait admettre, dans le cas général, l'inégalité des vitesses de propagation aussi bien dans le vide que dans les milieux pondérables, puisque les auteurs n'ont cessé de songer à prouver cette inégalité dans le vide. Or la formule actuelle des indices conduisait à l'absence de dispersion par réfraction dans ces conditions, quand la

lumière passe du vide dans un milieu réfringent. Il y aurait une réfraction, mais plus de dispersion. C'est cette simple observation qui nous permettait de conclure de suite à l'inexactitude de la formule des indices, telle qu'on l'a déduite du théorème de Fermat.

Montrons d'abord que l'égalité des vitesses dans le vide entraîne l'égalité dans les milieux pondérables.

Qui est-ce qui caractérise soit le son, soit la lumière, quand on admet que la propagation se fait par ondes? C'est non seulement la *durée d'une oscillation* que l'on désigne par T, mais encore le nombre N de ces oscillations en une seconde.

Un son, une lumière sont donc caractérisés par ces deux-constantes (N, T). Supposons le son le plus grave réduit à $N = 1$, il est bien clair que le son *ne sera formé* qu'au bout d'une oscillation complète dont T est la durée. Or si dans le même temps se produit un son aigu, faisant 10.000 oscillations en 1 seconde de durée T', le rapport $\frac{N'}{N}$ étant égal à 10.000, ce qui permet de caractériser le son aigu par rapport au son grave, on voit que le premier ne *sera formé* qu'au bout du temps N'T', le second ne l'étant qu'au bout du temps T. Il en est de même de tous les états vibratoires.

Le lapsus des théories mathématiques actuelles de la lumière est d'avoir perdu de vue ces considérations, que l'on a toujours présentes à l'esprit quand il s'agit des ondes sonores.

Ainsi ayant :

$$(1) \qquad \varepsilon = \delta \sin 2\varpi \frac{t}{T},$$

à l'origine des ondulations, les auteurs ont cru que, quand on avait écrit à une certaine distance en tenant compte de la vitesse de propagation

$$(2) \qquad \varepsilon = \delta \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

on avait exprimé que la *lumière*, sa force vive produite en un point, s'était transmise à une certaine distance x de l'origine des ondes. Il n'en est rien, puisque la *lumière* n'aura été *constituée* à cette distance que quand Nδ vibrations auront été exécutées *dans un temps* NT. On verra les conséquences importantes que nous déduirons de cela pour les constructions d'Huyghens. Nous pouvons de suite en conclure l'égalité de propagation des ondes dans les milieux pondérables, si l'on admet cette égalité dans le vide.

Soit M l'origine des ondes, et supposons la *lumière* de longueur d'onde la plus grande constituée par deux ondes. On aura, dans le vide et le milieu pondérable, la figure suivante pour deux rayons, si l'on admet l'égalité des vitesses de propagation des lumières simples dans les deux milieux.

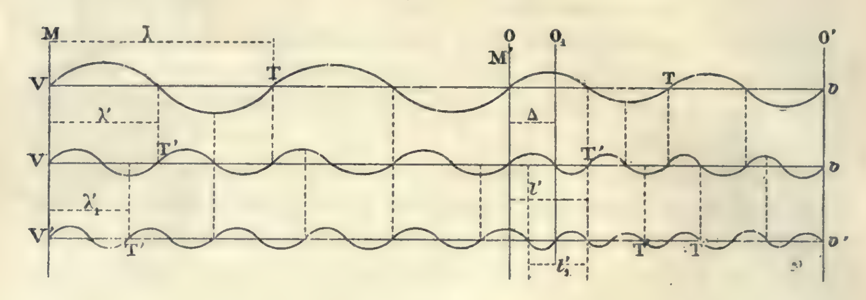


Fig. 1.

Si V est la vitesse dans le vide, λ la longueur d'onde du premier rayon, λ' celle du second rayon, v la vitesse des deux rayons dans le milieu pondérable, MO un intervalle parcouru en 1 seconde, on voit que, pour un observateur en O, il aura passé *dans le même temps* 2 ondes λ pour le premier rayon et 4 ondes λ' pour le second, ayant :

$$\lambda = VT, \qquad \lambda' = VT',$$

et l'observateur jugera ainsi que le rapport du nombre de vibrations perçues en 1 seconde, soit $\frac{N'}{N}$, est égal à 2.

Que l'observateur soit en O' et l'intervalle OO' encore parcouru en 1 seconde. Si l'on suppose les vitesses de propagation les mêmes, on aura :

$$l = vT, \qquad l' = vT',$$

puisque, dans la théorie actuelle, on admet que T, T' restent invariables en traversant les différents milieux. Il en résulte par conséquent que 2 ondes l auront passé en O' quand 4 ondes l' auront passé dans le même temps. Donc on aura encore $\frac{N'}{N} = 2$. Et les lumières perçues seront les mêmes. On aura le tableau suivant :

	Vide	Milieu pondérable
1re lumière.	V, λ, (N, T)	v, l, (N, T)
2e lumière.	V, λ', (N', T')	v, l', (N', T')

Ainsi en admettant, comme les auteurs, que rien de particulier ne se soit passé à la surface de séparation des deux milieux, on ne pouvait retrouver les mêmes lumières, le même rapport $\frac{N'}{N}$ en O′ qu'à la condition de supposer que les vitesses de propagation fussent restées les mêmes.

Cela posé, supposons que la vitesse de la seconde lumière soit, comme on l'admet actuellement, v', on aurait pour la longueur d'onde :

$$l'_1 = v'T',$$

par suite l'intervalle OO′ serait égal à $N'_1 l'_1$, et ce rayon serait caractérisé par les constantes :

$$l'_1, \quad (N'_1, T').$$

Remarquons que l'_1 est une longueur d'onde *déterminée par l'expérience* et *sur laquelle il n'y a pas à revenir.*

La conséquence de cette observation nous conduira à notre théorie nouvelle de la dispersion.

En admettant pour le second rayon les constantes :

$$l', \quad (N', T').$$

la lumière (N′, T′) reste exactement ce qu'elle était dans le vide, ce qui est conforme aux hypothèses actuelles; mais l' a une valeur différente de celle que fournit l'observation. En admettant :

$$l'_1, \quad (N'_1, T').$$

l'_1 est conforme à l'expérience, mais (N'_1, T') prouve que telles étaient les constantes du vide et non (N′, T′), comme on l'avait admis, par suite que, à l'origine des ondes émises dans le vide, V, λ′, correspondant à N′, T′, étaient devenus V′, λ'_1. Remarquons que, dans les espaces célestes, toutes les lumières que l'on peut imaginer sont engendrées d'une source lumineuse; par conséquent, ou les vitesses de propagation sont les mêmes dans le vide, et alors les lumières qui se propagent sont exactement celles qui ont été émises, ou les vitesses sont inégales V, V′, et alors une lumière λ′, N′, T′ se transforme immédiatement en une lumière λ'_1, N'_1, T′.

Ce dernier phénomène pouvait être prévu d'après les recherches de Doppler. Admettre, en effet, qu'une onde prenne un retard ou une avance sur une autre onde, c'est exactement comme si l'on admettait

qu'un observateur serait resté immobile par rapport à la première, et se serait déplacé par rapport à la seconde.

Donc, par ce seul fait que les constantes d'une lumière émise N', T' étaient devenues N'_1, T' dans un milieu pondérable, nous avions conclu : 1° qu'elles avaient cette valeur dans le vide ; 2° que la vitesse et la longueur d'onde du vide étaient V', λ'_1, et non V, λ'.

Donc, l'hypothèse que les vitesses se propagent également vite dans le vide et inégalement vite dans le second milieu était *inadmissible* et incompatible avec la théorie des ondulations.

Nous allons aller plus loin et montrer que la théorie des ondulations ne permettait pas d'*observer* des vitesses de propagations inégales.

Une des raisons qui ont pu faire croire à la possibilité d'observer la dispersion en s'adressant à des espaces immenses parcourus par la lumière, est que le mouvement vibratoire est régi par la formule (2), dans laquelle x est la distance de l'observateur à l'origine du mouvement.

On n'a pas réfléchi que, dans cette formule, x ne devait être considéré que comme une fraction de λ. En effet, le temps que met une onde à se propager doit être évalué en des multiples de T et fraction α de T. L'espace x parcouru dans le temps $t = \mathrm{MT} + \alpha\mathrm{T}$, avec une vitesse V est :

$$x = \mathrm{V}(\mathrm{MT} + \alpha\mathrm{T}) = \mathrm{MVT} + \mathrm{V}\alpha\mathrm{T} = \mathrm{M}\lambda + \Delta,$$

Δ étant l'espace parcouru dans le temps αT. En substituant cette valeur dans la relation (2), il vient :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \mathrm{M} - \frac{\Delta}{\lambda}\right) = \delta \sin 2\varpi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

Donc, pour un observateur placé en O_1, à une distance x de l'origine M des ondes, les choses se passent, dans la théorie des ondulations, comme si l'origine du mouvement avait été transporté de M en M', et que l'observateur fût à une distance Δ du nouveau centre, *inférieure à une longueur d'onde.*

Le bénéfice des espaces immenses parcourus est donc *illusoire*, pour juger de l'inégalité des vitesses de propagation.

Si l'on avait réussi à faire la preuve expérimentale de la dispersion dans le vide, on aurait eu la meilleure démonstration de l'exactitude de la théorie de l'émission. L'insuccès constaté jusqu'ici nous prouve, au contraire, le bien fondé de la théorie des ondulations, et par suite

laisse indéterminé le problème de la dispersion, soit dans le vide, soit dans les milieux pondérables par la simple inégalité des vitesses de propagation des lumières simples.

Mais ce qui résulte d'une façon indubitable de notre analyse, c'est que l'égalité ou l'inégalité des vitesses dans le vide entraîne l'égalité ou l'inégalité dans les milieux pondérables. Donc les indices ne pouvaient pas plus être donnés d'après le théorème de Fermat par le rapport $\frac{V}{v_\lambda}$ que par $\frac{V_\lambda}{v_\lambda}$. Remarquons que si les expériences avaient abouti et que l'on eût démontré la dispersion dans le vide, le théorème de Fermat aurait toujours donné $n = \frac{V_\lambda}{v_\lambda}$ et comme l'on admet que l'on a actuellement $n = \frac{V}{v_\lambda}$ et que l'on explique ainsi la dispersion par réfraction, la réussite des expériences contribuerait précisément à prouver le contraire de ce que l'on veut obtenir, c'est-à-dire l'explication de la dispersion dans la réfraction par l'inégalité des vitesses de propagation dans un seul milieu. Comme il y aurait bien des chances, et nous le prouverons, pour que :

$$\frac{V_\lambda}{v_\lambda} = \frac{V_{\lambda'}}{v_{\lambda'}} = \frac{V_{\lambda''}}{v_{\lambda''}} = \ldots,$$

il en résulterait que l'on aurait de la dispersion dans un seul milieu, et une seule réfraction, mais pas de dispersion, quand la lumière blanche traverse deux milieux. Ce qui est précisément le contraire des observations.

En réalité, nous verrons dans notre théorie que les indices ne peuvent être exprimés qu'en fonction des longueurs d'onde dans les deux milieux, mais non pas à la manière dont les auteurs y étaient arrivés de leur côté :

$$n = \frac{\lambda}{l}, \qquad n' = \frac{\lambda'}{l'}, \qquad n'' = \frac{\lambda''}{l''}.$$

Sachant que l'on a simultanément :

$$\begin{cases} \lambda = VT, & \lambda' = VT', & \lambda'' = VT'', \\ l = v(T \pm \theta), & l' = v(T' \pm \theta), & l'' = v(T'' \pm \theta), \end{cases}$$

si l'on admet l'égalité des vitesses de propagation dans le vide et par

suite dans les milieux pondérables ; au contraire :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda = VT', & \lambda_1' = V_1 T' \\ l = v(T \pm \theta), & l_1' = v_1 (T' \pm \theta), \end{array}\right.$$

si l'on admet l'inégalité des vitesses dans le vide et les milieux pondérables. On voit donc que si l'on avait, grâce à l'existence d'une dispersion dans le vide,

$$\frac{V}{v} = \frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2} = \ldots$$

on aurait toujours :

$$\text{(F)} \qquad n = \frac{V}{v}\,\frac{T}{T \pm \theta}, \qquad n' = \frac{\lambda'}{l'} = \frac{\lambda_1'}{l_1'} = \frac{V}{v}\,\frac{T'}{T' \pm \theta} \ldots$$

et que les rapports $\dfrac{1}{1 \pm \dfrac{\theta}{T}}$, $\dfrac{1}{1 \pm \dfrac{\theta}{T'}}$, ... donneraient encore une dispersion quand on passerait d'un milieu dans un autre milieu. On ne pourrait vouloir soutenir que l'on eût $v\left(1 \mp \dfrac{\theta}{T}\right) = v_1$, $v\left(1 \pm \dfrac{\theta}{T'}\right) = v_1'$, ..., v_1, v_1' étant les vitesses des formules données jusqu'ici, puisque nous avons montré que l'inégalité des vitesses dans le milieu pondérable entraînerait l'inégalité dans le vide, par suite que l'on aurait en même temps V_1, V_1'... dans la formule des indices.

Ainsi, alors que la théorie et les formules actuelles des indices ne permettaient plus de prévoir de dispersion par réfraction si l'on prouvait la dispersion par inégalité des vitesses dans le vide ; nos formules et notre théorie en admettant que la dispersion par réfraction soit due à une variation des valeurs T, T'... dans la zone d'attraction de Newton, nous montrent qu'il pourrait y avoir en même temps une autre dispersion par inégalité des vitesses dans un seul milieu.

Nous laisserons de côté la dispersion possible dans le vide, et nous admettrons, comme les auteurs, qu'elle n'a pas lieu.

D'après ce que nous venons de voir, il ne reste plus que l'hypothèse de l'égalité des vitesses dans les milieux pondérables, comme dans le vide.

Ayant les relations des vitesses égales :

$$l = vT, \quad l' = vT', \quad l'' = vT'',$$

nous arrivons à cette conclusion forcée que si les longueurs d'onde ainsi calculées ne sont pas celles de l'expérience, c'est que les valeurs de T, T′, T″ ont subi une modification passagère quand on passe du vide dans des milieux réfringents. L'*invariabilité* de ces valeurs *admise sans preuve aucune*, dans toutes les théories actuelles de la lumière, était donc incompatible, elle aussi, avec la théorie des ondulations. Et, en effet, comment admettre que, dans la zone d'attraction admise par Newton, l'éther du vide vibrerait exactement pour la même unité de déplacement, comme l'éther, loin de cette zone ? Qu'ayant, à la suite d'un choc dans le vide, (N, T), ces deux valeurs resteraient invariables dans la zone d'attraction. C'est cependant ce que dans les théories mathématiques de la lumière, on avait admis jusqu'ici. Comme nous venons de montrer que la vitesse est la même pour toutes les lumières simples, et que l'expérience donne l_1, l'_1, l''_1, au lieu de l, l', l'', il en résulte donc que l'on aura dans la zone de Newton :

$$l_1 = v(\mathrm{T} \pm \theta), \qquad l'_1 = v(\mathrm{T}' \pm \theta), \qquad l''_1 = v(\mathrm{T}'' \pm \theta),$$

et que les constantes d'un rayon engendré par une lumière du vide dans un milieu pondérable sera à l'entrée :

$$v, \quad l'_1, \quad \mathrm{N}' \mp \nu', \quad \mathrm{T}' \pm \theta,$$

étant donné que l'on avait dans le vide :

$$\mathrm{V}, \quad \lambda', \quad \mathrm{N}', \quad \mathrm{T}',$$

et que

$$\frac{\lambda'}{l'_1} = n'.$$

On voit que ($\mathrm{N}' \mp \nu'$, $\mathrm{T}' \pm \theta$) répondait sensiblement à la lumière (N', T') du vide tandis que (N'_1, T'), auquel conduisait l'inégalité des vitesses s'en écartait considérablement.

Comme les théories mathématiques de la dispersion, depuis Cauchy, étaient uniquement basées sur l'hypothèse de l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples, nous devions donc conclure qu'il n'y avait plus de théorie de la dispersion et qu'il fallait revenir à l'ancienne méthode de Newton en l'appliquant aux ondulations. On se trouve en même temps dans la vérité expérimentale qui permet d'observer facilement la dispersion de la lumière blanche. Comme le faisait Newton, nous avons supposé que la lumière passait d'un milieu

dans un autre, au lieu de nous cantonner comme Cauchy dans un seul milieu. Si le premier était le vide, on avait à chaque instant, comme les auteurs l'admettent entre le déplacement d'une molécule lumineuse et la durée d'une oscillation T :

$$(1) \qquad \varepsilon = \delta \sin 2\varpi \frac{t}{T},$$

d'où l'on déduisait, comme on sait, ayant $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = F\varepsilon$:

$$(3) \qquad F = -\frac{4\varpi^2}{T^2},$$

F étant la force élastique correspondant à l'unité de déplacement pour une couleur engendrée (N, T). Cette force, ainsi que la formule le montre, varie avec les diverses lumières. Mais pour une même lumière, les auteurs avaient admis qu'elle était invariable quand on passait du vide dans un milieu pondérable. *A priori*, c'était difficile à comprendre, car, comment admettre qu'une molécule d'éther déplacée d'une certaine longueur dans le vide de sa position d'équilibre, n'aura pas engendré une force de réaction différente pour la même longueur de déplacement, quand il s'agira de l'éther qui vibre dans la zone d'attraction de Newton ?

Or la théorie que nous venons de développer nous prouve précisément que T devient (T $\pm$ θ) pendant un temps très court, quand on passe du vide dans un milieu pondérable. Elle fait donc disparaître cette conséquence que l'esprit se refusait à admettre, de l'invariabilité de F pour une même lumière quand on changeait de milieu. Ayant (3) dans le vide, nous aurons donc dans l'éther de la zone :

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \Phi = -\frac{4\varpi^2}{(T \pm \theta)^2},$$

bien entendu, et nous le montrerons, $\frac{\theta}{T}$ sera extrêmement petit, sauf dans les corps fluorescents.

De plus F et T resteront invariables quand le rayon incident sera normal à la surface de séparation de deux milieux. Dans ce cas, en effet, la composante de l'attraction dans le plan de vibration est nulle. Il n'en serait plus de même dans la polarisation rotatoire.

Enfin pour un rayon oblique, après un certain chemin parcouru, l'at-

traction devient insensible, et Φ, $T\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$ reprennent leurs valeurs F, T alors que la vitesse acquise v et la longueur d'onde l_1 resteront les mêmes. Il est facile de le montrer.

Un des points qui n'ont pas peu contribué à embrouiller la question de la dispersion a été l'habitude prise d'exprimer les vitesses en fonction d'autant de temps différents T, T′, T″..., qu'il y avait de lumières. Si, comme en mécanique, nous adoptons une seule et même variable T, nous dirons qu'ayant dans la zone d'attraction :

$$l_1 = vT\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right), \qquad l'_1 = vT'\left(1 \pm \frac{\theta}{T'}\right), \qquad l''_1 = vT''\left(1 \pm \frac{\theta}{T''}\right);$$

à l'époque uniforme T, les longueurs respectives égales :

$$\frac{l_1}{1 \pm \frac{\theta}{T}} \qquad \frac{l'_1}{1 \pm \frac{\theta}{T'}}\frac{T}{T'} \qquad \frac{l''_1}{1 \pm \frac{\theta}{T''}}\frac{T}{T''}$$

auront été parcourues par les diverses lumières simples *avec la même vitesse v*.

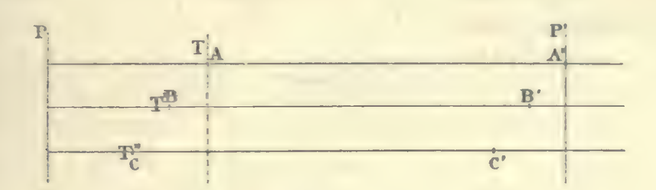


Fig. 4.

Donc les choses se passent au sortir de la zone comme si l'origine des vibrations des différentes lumières était en A, B, C, ... Par conséquent, si les ondes se propagent avec *la même vitesse*, elles arriveront *en même temps* $t = MT$ en A′, B′, C′, ... Ainsi, arrivant en P′ à des intervalles de temps différents, ceci ne sera nullement la preuve que les ondes se seront propagées avec des vitesses différentes, mais qu'elles auront conservé intact l'intervalle de temps qu'elles ont brusquement acquis dans la zone d'attraction. Un exemple bien connu est celui des anneaux colorés de réflexion, dans lequel la vitesse des lumières simples restant la même, les rayons éprouvent cependant des retards différents $\frac{\lambda}{2}$,

$\frac{\lambda'}{2}$, $\frac{\lambda''}{2}$; on aurait commis une erreur, si l'on avait conclu que ces retards tenaient à ce que les vitesses étaient devenues différentes.

Le temps mis par la première onde pour venir de A en A' sera :

$$t = \text{MT},$$

avec une vitesse v, l'espace parcouru sera :

$$\text{M} \frac{l_1}{1 \pm \frac{\theta}{\text{T}}} = vt = v\text{MT},$$

d'où :

$$\text{(H)} \qquad l_1 = v\left(1 \pm \frac{\theta}{\text{T}}\right)\text{T}.$$

On voit donc que l'on retrouve exactement la même valeur pour la longueur d'onde à la sortie, que dans la zone d'attraction, avec cette différence que, dans la zone d'attraction, on avait la formule habituelle :

$$l_1 = v\text{T}_1,$$

qui est la formule consacrée qui lie la longueur d'onde à la vitesse et à la durée d'une oscillation.

Jamais jusqu'ici aucun physicien n'aurait pu croire que la longueur d'onde pouvait être liée à la vitesse et à la durée d'une oscillation par une autre formule. Nous démontrons pour la première fois, par la formule fondamentale (H), que la longueur d'onde sera liée à la vitesse v et à la durée T d'une oscillation, en un point d'un milieu, par une formule totalement différente de celle admise jusqu'ici.

Cela se produira toutes les fois que le rayon traversera de nouveaux milieux, où, sous l'influence de zones d'attraction, T prendra provisoirement une valeur $\text{T}\left(1 \pm \frac{\theta}{\text{T}}\right)$.

Telle est la théorie nouvelle de la dispersion que nous avons développée, dans l'hypothèse où toutes les lumières, simples se propagent avec la même vitesse dans les mêmes milieux pondérables. Cette théorie nous a conduit, pour l'indice en fonction de la longueur d'onde dans un milieu non hémiédrique, à la relation de Cauchy :

$$n = \text{A} + \frac{\text{B}}{\lambda^2} + \frac{\text{C}}{\lambda^4} + \cdots$$

Nous montrerons que Cauchy dans sa théorie étant arrivé à la relation :

$$V^2 = A + \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} + \dots,$$

où V et l sont la vitesse et la longueur d'onde du milieu élastique n'avait pas le droit de substituer les indices aux vitesses, sa théorie ayant été établie pour *un seul milieu de densité uniforme*. Nous montrerons de plus qu'en faisant cette substitution on arrivait non pas, comme les auteurs le prétendaient, à la formule précédente donnant l'indice en fonction de la longueur d'onde du vide sous une forme vérifiée par les expériences, mais bien à :

$$n = A + \frac{B}{a\lambda^2 + b} + \frac{C}{(a\lambda^2 + b)^2} + \dots,$$

en contradiction avec les recherches de Beer.

De plus, alors que Cauchy a été impuissant avec sa théorie à assigner au terme constant A une valeur déterminée, nous trouvons, avec notre théorie, que ce terme est égal à $\frac{V}{v}$, c'est-à-dire au rapport des vitesses de la lumière *blanche* dans le vide et le milieu dont n est l'indice, pour une lumière quelconque (N, T, λ) du vide.

Le signe — devant $\frac{\theta}{T}$ nous donne la dispersion normale, le signe + la dispersion anomale ; l'indice peut devenir plus petit que l'unité, comme dans la réflexion métallique si $v\left(1 + \frac{\theta}{T}\right) > V$, ce qui n'exige pas que $v > V$, comme les auteurs étaient, bien malgré eux, obligés de le conclure dans leur théorie, sans pouvoir l'expliquer.

En ce qui concerne la vitesse de propagation des ondes, nous faisons disparaître cette anomalie d'être obligé de considérer l'éther, comme un milieu élastique, n'ayant aucune des propriétés de ceux que nous connaissons, l'air, l'eau, les solides. Newton, puis Laplace ont montré que dans les corps accessibles à l'expérimentation, la vitesse de propagation des *ondes* est donnée par la formule :

$$v^2 = \frac{e}{d}, \tag{4}$$

d étant la densité, e l'élasticité. Il semble que cette formule vérifiée par

tous les expérimentateurs aurait dû être un guide sûr. Elle nous conduit à l'égalité de propagation des vitesses des lumières simples, soit dans le vide, soit dans un milieu pondérable. Elle convient donc à l'éther, puisque nous avons prouvé cette égalité.

Elle nous permettra de conclure que ni Cauchy dans sa théorie de la dispersion, ni Fresnel dans la dispersion rotatoire, n'ont été dans la vérité. Cauchy arrive à la relation (Verdet, *L. d'Op.*, t. II, p. 25) :

$$V^2 = df[\lambda^2, \varphi(r)].$$

Cette relation est-elle vraiment en contradiction avec celle de Newton ? Il ne semble pas qu'il y ait doute, si l'on se reporte à l'esprit même qui a dirigé Cauchy et tous les auteurs qui l'ont suivi dans leurs démonstrations. Dans la formule de Newton la vitesse est indépendante de la longueur d'onde ; elle en est essentiellement fonction dans celle de Cauchy. Seulement on oublie un fait fondamental sur lequel nous venons d'insister et qui est l'origine de l'idée fausse qui s'est ancrée dans les esprits. Quand nous parlons de longueurs d'onde, nous entendons celles que nous donne l'expérience et qui, dans un milieu réfringent pour lequel nous avons des indices, répond au passage de la lumière du vide dans un milieu pondérable.

Dans le vide ou l'éther fictif de Cauchy, les longueurs d'onde sont liées aux vitesses par la formule :

$$l = VT ;$$

dans les corps réfringents pour lesquels la lumière a nécessairement traversé *deux* milieux, on a, au contraire, la relation :

$$\text{(H)} \qquad l = V\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right) T.$$

Les propriétés générales de l'élasticité représentées par les formules :

$$V^2 = -F\frac{l^2}{4\varpi^2} = F_1\frac{l^2}{2\varpi^2},$$

ayant comme on sait $F_1 = -\frac{F}{2}$ quand on construit l'ellipsoïde de polarisation, n'ont été établies que pour un seul milieu.

D'un autre côté, pour comparer la vitesse telle qu'elle résulte de la formule de Newton à celle donnée en fonction de la longueur d'onde, il faut commencer par s'en rappeler la définition. Si la vitesse est uni-

forme, on la mesure par l'espace parcouru dans l'*unité* de temps. Il en est ainsi de la vitesse exprimée par la formule de Newton. Mais, pour celle déduite de la théorie générale de l'élasticité, au lieu de prendre les espaces l, l', l'', ..., parcourus dans les temps T, T', T'', ..., il faut considérer ceux parcourus dans l'unité de temps $\frac{l}{T}$, $\frac{l'}{T'}$, ..., et alors seulement on pourra comparer la vitesse $\frac{V}{T}$ à celle de Newton, v.

Dans un milieu élastique, l'expression $\frac{F_1}{2\varpi^2}\left(\frac{l}{T}\right)^2$ peut parfaitement être constante et par suite égale à la relation de Newton $v^2 = \frac{e}{d}$, savoir:

$$\frac{F_1}{2\varpi^2}\left(\frac{l}{T}\right)^2 = \frac{e}{d},$$

F_1, l, T étant variables avec les lumières. *La théorie générale de l'élasticité n'a donc nullement prouvé l'égalité* ou *l'inégalité* des vitesses de propagation des lumières simples. Et les auteurs qui le croient et l'enseignent, en invoquant les formules générales précédentes, ont simplement montré qu'ils ne s'étaient jamais douté que la valeur de l de l'éther fictif n'avait nullement la même expression que celle de la formule (H) où $\frac{l}{T}$ est *nécessairement variable*, avec les diverses lumières, à cause du coefficient $\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$.

Les longueurs d'onde du milieu unique, l'éther fictif de Cauchy, ne peuvent donc être un seul instant l'image des longueurs d'onde des expériences, puisque celles-ci sont essentiellement fonctions de celles du vide comme la figure 1 nous le montrait. Et c'est une idée erronée d'avoir substitué les unes aux autres, même en pensée. Si, dans la formule de Cauchy, nous remplaçons l par VT, l' par V'T' nous avons :

$$V^2 = A + \frac{B}{V^2}\frac{1}{T^2} + \frac{C}{V^4}\frac{1}{T^4} + \cdots$$
$$V'^2 = A + \frac{B}{V'^2}\frac{1}{T'^2} + \frac{C}{V'^4}\frac{1}{T'^4} + \cdots$$

Or la méthode des approximations successives consiste, ainsi qu'on le sait, à considérer dans le second membre V, V' comme constants ;

on aura donc:

$$V^2 = A + \frac{B_1}{T^2} + \frac{C_1}{T^4} + \dots$$

$$V'^2 = A + \frac{B'_1}{T'^2} + \frac{C'_1}{T'^4} + \dots$$

B_1, B'_1 d'un côté, C_1, C'_1 de l'autre sont-ils égaux, ou différents ? Nous n'avons aucun moyen de le contrôler, puisqu'il nous est interdit de substituer les indices aux vitesses dans ces formules, et que la dispersion dans le vide ne pourra jamais être observée directement dans la théorie des ondulations, comme nous l'avons indiqué.

Mais, dans le vide, on admettait sans conteste que l'on eût $V = V' = V''\dots$, il en résulte donc que toute l'analyse de Cauchy se ramenait à cette formule:

$$V^2 = A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4} + \dots$$

donnant la vitesse en *fonction du temps ;*

Savoir :

$$V = \varphi(T).$$

Il ne semble pas que Cauchy se soit aperçu de ce résultat, d'après lequel dans le vide, avec des *vitesses de propagations égales*, l'expression de la vitesse était *nécessairement* différente, quand on changeait l'unité de temps avec les diverses lumières.

On voit donc le lapsus commis par Cauchy, lorsqu'il spécifie que, dans le vide la vitesse à laquelle sa formule conduit doit être indépendante de la longueur d'onde, ce qui revenait à nier, après l'avoir établie, la relation entre la vitesse et le temps. Comme on ne peut savoir si, dans l'éther fictif, B_1, C_1 sont égaux à B'_1, C'_1, ou inégaux, on voit donc qu'il est impossible de dire que la relation des vitesses en fonction du temps à laquelle Cauchy est arrivé était en contradiction avec la formule de Newton ; il faut supposer, au contraire, que, dans le milieu pondérable de Cauchy comme dans le vide on avait $B_1 = B'_1$, $C_1 = C'_1$, ce qui entraînait l'égalité des vitesses de propagation. C'est uniquement, en effet, en admettant l'exactitude de la formule de Newton que Young puis Fresnel ont établi les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière polarisée. Le quatrième des principes fondamentaux admis par Fresnel dans son mémoire de 1823 est que les vitesses de la propagation dans les différents milieux sont en rai-

son inverse des racines carrées des densités de l'éther dans ces milieux. Or Cauchy arrive à la raison directe. Comme l'expérience a vérifié les formules de Fresnel, la conséquence forcée est que la théorie de Cauchy conduisait à une relation intéressante entre la vitesse et le temps, mais *dont on ne pouvait rien tirer*, pour l'étude de la dispersion *par réfraction.*

Il nous reste, pour terminer, à expliquer la contradiction apparente sur laquelle les auteurs ont prudemment fait le silence entre les vitesses de Cauchy et de Newton. Dans le premier cas, V^2 est *proportionnel* à la densité de l'éther et, dans le second, v^2 est *inversement proportionnel* à celle-ci.

Les auteurs concluaient, d'après la formule de Cauchy, que la densité de l'éther était plus petite dans les milieux pondérables que dans le vide, alors qu'elle est plus grande d'après la formule de Newton.

La contradiction est apparente, comme nous allons le montrer. De même que nous n'avons pu comparer que $\frac{V}{T}$ de Cauchy à v de Newton, c'est-à-dire deux vitesses exprimées dans l'unité de temps, de même, lorsqu'il s'agira de la vitesse en fonction de la densité, seule l'expression $\frac{V^2}{d}$ sera comparable au v^2 de Newton, regardé comme la force vive de l'unité de masse. Ayant, sachant que $F = -\frac{e}{a}$, comme nous le verrons plus bas,

$$V^2 = df[\lambda^2, \varphi(r)] = -\frac{F}{4\varpi^2}\lambda^2 = e\frac{\lambda^2}{4\varpi^2 a};$$

si l'on prend comme milieu élastique l'éther du vide pour lequel on a sans conteste $V^2 = C^{te}$, savoir pour les différentes lumières $\frac{\lambda^2}{a} = \frac{\lambda'^2}{a'} = \dots$, il viendra :

$$V^2 = ke = kv^2 d,$$

donc

$$\frac{V^2}{d} = kv^2.$$

Ainsi l'on ne pouvait comparer la force vive des formules de Cauchy à celle de Newton qu'à la condition d'avoir préalablement posé $\frac{V^2}{d} = V'^2$.

Et, dans ces conditions, comme on voit, V'^2 est en raison inverse de la densité, ainsi que l'indiquait la formule de Newton.

Nous avons donc montré que, dans l'éther fictif de Cauchy, il n'y avait aucune contradiction entre la formule des vitesses telle qu'elle résulte de la théorie générale de l'élasticité et celle de Newton.

Mais comment admettre que les auteurs qui ont fait usage de la formule de Newton, comme Fresnel et Young, formule applicable aux ondes sonores, pour lesquelles la vitesse de propagation est indépendante de la hauteur du son, aient admis l'inégalité des vitesses des lumières simples ?

Il faut conclure que, confondant la force élastique F_1 avec l'élasticité e, ils ont cru que la formule de Newton devait s'écrire :

$$v^2 = \frac{F_1}{d},$$

sachant que $F_1 = \frac{2\varpi^2}{T^2}$. Or tout état oscillatoire représenté par la relation (1) qui correspond à $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = F\varepsilon = Fa \cdot \frac{\varepsilon}{a}$ est un mouvement pendulaire, quand on suppose ε assez petit pour coïncider avec un arc décrit avec un rayon égal à a, et alors $\frac{\varepsilon}{a}$ est assez petit pour pouvoir être considéré comme substitué à $\sin\frac{\varepsilon}{a}$, ce qui permet de retrouver le mouvement pendulaire $Fa = -e$; de sorte que les divers états vibratoires :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \frac{t}{T}, \qquad \varepsilon = \delta' \sin 2\varpi \frac{t}{T'}, \ \cdots$$

correspondant aux différentes valeurs T, T′, ... des lumières simples, peuvent être regardés comme représentés par des oscillations de pendules de longueur a, a', a'', ..., sous l'influence d'une même force e. Comme on a, dans le cas de mouvement pendulaire :

$$T = 2\varpi\sqrt{\frac{a}{e}}, \qquad T' = 2\varpi\sqrt{\frac{a'}{e}}, \qquad T'' = 2\varpi\sqrt{\frac{a''}{e}}$$

et d'un autre côté que

$$T = \varpi\sqrt{\frac{2}{F_1}}, \qquad T' = \varpi\sqrt{\frac{2}{F'_1}}, \qquad T' = \varpi\sqrt{\frac{2}{F''_1}};$$

il en résulte les relations :

$$F = -\frac{e}{a}, \qquad F' = -\frac{e}{a'}, \qquad F'' = -\frac{e}{a''}.$$

On voit donc que les différents mouvements oscillatoires T, T′, T″, ..., pouvaient se produire sous l'influence d'une force constante, qui est précisément l'élasticité, et qu'à ces mouvements devaient correspondre des forces élastiques F_1, F'_1, F''_1, ..., sans qu'on fût autorisé à confondre ces forces avec l'élasticité.

Et, par suite, du moment que l'on admettait, comme Fresnel et Young, la formule de Newton, on devait nécessairement conclure à l'égalité des vitesses de propagation des lumières simples. Et, en effet, les forces F_1, F'_1, F''_1, ..., sont essentiellement fonctions, et de l'élasticité *e* et *du choc initial* qui déplace une molécule de sa position primitive. L'élasticité ne dépend que de l'attraction ou de la répulsion moléculaire.

Dès que le déplacement *le plus petit* se produit, le mouvement se transmet, l'onde se propage, indépendamment des élongations maxima δ, δ', δ'', ..., que trace la molécule dans les temps $\frac{T}{4}$, $\frac{T'}{4}$, $\frac{T''}{4}$, etc...

C'est ce que Newton et Laplace ont parfaitement indiqué dans leur formule, indépendante de la longueur d'onde, comme on a pu le vérifier pour les ondes sonores.

La vitesse dans les milieux pondérables étant plus petite que dans le vide, Cauchy déduisait de sa formule que la densité de l'éther emprisonné dans les corps était plus petite que dans le vide. Nous déduisons exactement le contraire avec la formule de Newton, à l'exemple de Fresnel, du reste.

Or, si les molécules d'éther se repoussent, elles sont attirées, comme les auteurs l'admettent, par les molécules pondérables ; il en résulte donc que, dans un même volume contenant une molécule pondérable, il y aura plus de molécules d'éther que dans le même volume dans le vide. La densité de l'éther dans les corps est donc plus grande que dans le vide, comme l'indiquait la formule de Newton, et comme l'attraction admise entre les molécules pondérables et les molécules d'éther devait le faire conclure.

Fresnel, pour expliquer le pouvoir rotatoire d'un liquide, admet que ses deux rayons circulaires, gauche et droit, se propagent avec des vitesses inégales.

Ceci permet d'expliquer la rotation du plan primitif de polarisation, mais non de retrouver la formule de la dispersion rotatoire si, comme nous l'avons prouvé, les lumières simples de même sens se propagent avec la même vitesse.

Suffira-t-il, dans la nouvelle théorie que nous donnerons, d'imiter ce que nous avons fait pour la dispersion ordinaire, de remplacer T par τ

dans les formules des rayons circulaires gauche et droit à l'entrée?

Nous verrons que la modification doit être plus profonde. En invoquant, comme l'avaït fait Fresnel, un pur artifice de calcul pour substituer analytiquement à l'entrée deux rayons circulaires de rotation inverse à un rayon polárisé rectilignement, on n'avait tenu aucun compte, dans le nouveau milieu, des propriétés les plus élémentaires de l'élasticité admis pour le rayon incident. Ce sujet s'écartant des considérations dans lesquelles nous sommes jusqu'ici entré, nous renvoyons à un autre mémoire cette nouvelle théorie de la dispersion rotatoire.

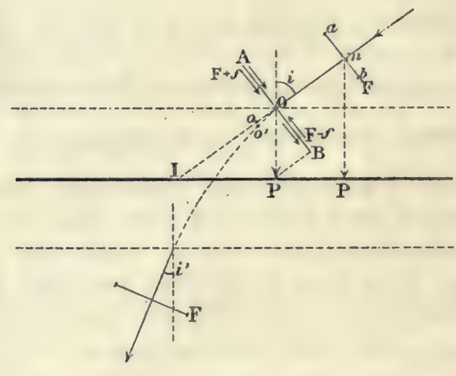


Fig. 5.

Ayant admis que la dispersion était uniquement due au passage de la lumière blanche d'un milieu d'une certaine force F dans un milieu (la zone d'attraction) d'une autre force Φ, nous avons été ainsi ramené à l'ancienne manière de faire de Newton. C'est-à-dire que, quand le rayon lumineux arrive dans la *zone d'attraction de la matière pondérable* sur les molécules d'éther, cette attraction se fait sentir de la manière suivante. Dans la théorie de l'émission, cette attraction ne pouvait qu'accélérer la chute de la molécule d'éther. Ce résultat était en contradiction avec l'expérience. On ne peut donc admettre que la résultante *effective* de l'attraction de la matière pondérable avait la direction *m*P. Dans la théorie des ondulations, les molécules d'éther vibrant dans un plan perpendiculaire à la direction du rayon incident, les composantes de l'attraction perpendiculaires à ce plan sont détruites par la résistance du milieu élastique et sont sans action sur le mouvement oscillatoire. Il n'en est plus de même pour les composantes de l'attraction dans le plan de vibration. Et quand le mouvement oscillatoire est en AB, où se fait sentir l'attraction, si AO est la plus grande

élongation de la molécule non soumise à l'attraction, OB > OA sera l'élongation quand l'attraction se fera sentir. Par suite, le centre du mouvement, qui était en O, est reporté en o'. On voit donc que, comme Newton, nous montrons l'influence directe de l'attraction de la matière pondérable non plus sur une molécule lumineuse lancée suivant mI, mais sur le déplacement d'un centre d'oscillation, entraîné d'un autre côté dans la direction mI avec la vitesse des ondes qui se propagent. Le tracé du centre d'oscillation sera donc celui que Newton donnait à sa molécule lumineuse. Il permet d'expliquer la réfringence des milieux pondérables.

La propagation de la lumière, du moment que l'on n'est plus en présence que d'ondes lumineuses, s'effectue conformément à la formule de Newton pour les milieux élastiques $v^2 = \frac{e}{d}$. Par conséquent, si Newton avait songé aux ondulations, sa formule de la propagation des ondes dans les milieux élastiques lui aurait de suite donné le rapport de la vitesse dans l'éther du vide, et d'un milieu pondérable, dans le même sens que l'indiquait le théorème de Fermat. En effet, grâce à l'attraction de la matière sur les molécules d'éther, celui-ci est nécessairement *plus dense* dans les milieux pondérables; par suite, la vitesse de propagation devait être plus petite, comme les expériences de Foucault l'ont prouvé. La méthode de Newton n'aurait donc pas été en contradiction avec l'expérience, si elle avait été appliquée à des molécules d'éther en vibration.

En ce qui concerne le théorème de Fermat, nous sommes arrivé à cette conséquence qu'il ne pouvait s'appliquer qu'à la théorie de l'émission et qu'il n'avait aucun sens dans le cas des ondulations. Nous avons montré en effet que la propagation du front de l'onde ne donne nullement le temps qu'il faut à la force vive qui constitue la lumière pour se propager d'un point à un autre. Comme nous l'avons vu précédemment, ce n'est pas quand le front de l'onde arrive en un point que celui-ci prend l'état vibratoire final qui constitue la lumière, mais bien quand la tête et la queue de l'onde ont passé par ce point, ce qui a lieu dans un temps NT et au minimum si $N = 1$ dans un temps T. De sorte que si $\frac{x}{V} + \frac{y}{v}$ est le temps mis par le front de l'onde pour parcourir le chemin $(x + y)$, le temps mis par la force vive pour s'établir sera égal à $\frac{x}{V} + \frac{y}{v} + NT$. Le théorème de Fermat ne pouvait donc s'appliquer dans ces conditions.

Or c'est *uniquement* sur ce théorème que l'on s'est basé pour *admettre*

la relation fondamentale de toute l'Optique :

$$(5) \qquad n = \frac{V}{v_\lambda}.$$

Cauchy, dans sa théorie, *admet* cette relation, qu'il ne pouvait naturellement démontrer, n'ayant étudié la lumière que dans un seul milieu. Si le théorème de Fermat, comme nous venons de l'indiquer, n'a aucun sens dans la théorie des ondulations, il en résulte qu'une des formules les plus importantes de l'Optique attend encore sa démonstration. Ce que celle donnée jusqu'ici valait, on s'en rendra compte en se reportant à l'appréciation de Billet.

Voici ce qu'il dit (*Traité d'Optique physique*, t. I, p. 64-65) :

« Fermat, dans sa démonstration théorique de la loi des sinus, prend pour point de départ l'harmonie qui règne dans la création. Quand la lumière doit aller sans condition d'un point à un autre, elle va en ligne droite. Si on l'astreint à toucher une surface ou une ligne, à aller, par exemple, d'un point A en un point B, en se réfléchissant sur une droite, elle choisit, pour s'y réfléchir, un point C qui donne la ligne brisée, AC + CB, la plus courte et, dans ces deux cas, l'économie porte sur le chemin décrit. Quand il y a changement de milieux, la route suivie n'étant plus la droite AB, il s'ensuit que l'économie doit porter sur autre chose que sur la longueur de la route. Fermat a trouvé juste en supposant qu'il y avait économie de temps, et en faisant consister la loi de la réfraction dans un minimum de l'expression $\frac{AC}{V} + \frac{CB}{v}$. »

. . . .

« Le seul reproche qu'on puisse faire à la méthode employée par Fermat est d'être, la plupart du temps, hors de la portée de l'intelligence humaine... Aussi, tout en applaudissant aux succès qu'obtiennent quelquefois, dans cette voie, des intelligences supérieures, nous ne voyons, dans la méthode des *causes finales*, qu'un procédé scientifique exceptionnel. »

Ceci revient à dire, en bon français, qu'il n'existe pas, en réalité, de démonstration de la loi des sinus, puisque la seule scientifique, celle de Newton, basée sur l'attraction des molécules lumineuses par la matière pondérable, conduisait à un résultat en contradiction avec l'expérience dans la théorie de l'émission.

Mais si l'on remarque, en outre, que la démonstration de Fermat, basée sur « l'harmonie de la création », « hors de la portée de l'intelli-

gence humaine », invoquant « la méthode des causes finales » et d'un « procédé scientifique exceptionnel » s'appliquait, en réalité, à la seule théorie de l'émission et non à celle des ondulations, nous pouvions dire, avec raison, qu'une des formules les plus importantes de l'Optique moderne attend encore sa démonstration.

Nous nous sommes chargé de la faire et de prouver que cette relation (5) était inexacte, que les indices étaient fonctions de quatre variables, les vitesses de la lumière dans les deux milieux et la durée des oscillations dans ceux-ci et la zone d'attraction, et que l'on avait :

$$(6) \qquad n = \frac{\lambda}{l_1} = \frac{V}{v} \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}}.$$

Bien entendu, si l'on admettait, comme les auteurs, que la force élastique fût la même dans les deux milieux et la zone d'attraction, on retrouverait, comme cas particulier, les indices en fonction des seules vitesses. Mais la méthode de Newton, appliquée aux ondulations, introduit d'elle-même le rapport des deux longueurs d'onde, c'est-à-dire quatre variables. C'est une démonstration directe que nous avons pour la première fois donnée, sans évoquer, comme Fermat, une cause finale qui, du reste, ne s'appliquait qu'à la théorie de l'émission.

En résumé, la théorie actuelle de la dispersion était uniquement basée sur l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples dans les milieux pondérables et l'invariabilité de la durée d'une oscillation T qui caractérisait une lumière, disait-on, soit dans le vide, soit dans tous les corps traversés. Nous avons substitué à cette théorie l'égalité des vitesses de propagation des lumières simples dans un même milieu, non pas par analogie avec ce qui existe dans le vide, mais parce que l'autre hypothèse conduirait à des lumières totalement différentes de celles du vide. Par contre, nous avons montré que la durée d'une oscillation T, qui caractérise une lumière, est essentiellement variable, T_1, avec les milieux réfringents *dans la zone d'attraction* admise par Newton, mais dans celle-ci seulement, et que l'on a, λ étant la longueur d'onde dans le vide :

$$T_1 = T \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{v}{V} \cdot C},$$

c'est cette variation passagère de la durée des oscillations, dans la zone de Newton, qui permet d'expliquer la dispersion par réfraction.

Ici :

$$C = \frac{n_{\lambda}' - n_{\lambda}}{\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}},$$

C est la constante de Beer dans un milieu réfringent, v et V sont les vitesses de la lumière *blanche* dans ce milieu et le vide. Le signe — correspond à la dispersion normale, le signe + à la dispersion anormale. Par suite, les longueurs d'onde, au lieu d'être représentées par la formule : $l_1 = v_{\lambda}T$, le seront par les formules :

$$l_1 = vT_1 = vT \pm \frac{v}{\lambda}\sqrt{\frac{v}{V} \cdot C},$$

ayant toujours : $n = \frac{\lambda}{l_1}$.

Ce sont ces longueurs d'onde, que nous substituons aux vitesses dans les constructions d'Huyghens, qui restent les mêmes dans ces conditions.

Nous avons donc fait disparaître cette anomalie que l'on admettait l'inégalité des vitesses dans les milieux pondérables, sans avoir pu jamais être arrivé expérimentalement à la démontrer, et l'égalité dans le vide.

Nous avons, en outre, ramené l'éther à jouir des mêmes propriétés que les milieux élastiques soumis à l'expérimentation, et reconnu satisfaire à la relation de Newton, où la vitesse est indépendante de la longueur d'onde : $v^2 = \frac{e}{d}$.

Ayant, de plus, retrouvé la formule fondamentale de la dispersion donnant l'indice en fonction de la longueur d'onde dans l'hypothèse de l'égalité des vitesses de propagation des lumières simples dans les milieux réfringents, quand on admet cette égalité dans le vide, nous devions donc la considérer comme exacte.

Par suite, il ne restait plus rien des théories actuelles de la dispersion que cette constatation :

Elles avaient été développées en partant uniquement d'une hypothèse que l'expérience n'*avait jamais pu vérifier*, incompatible, comme nous l'avons montré, avec la théorie des ondulations, et qui n'avait de raison d'être que dans la théorie de l'émission dont elle était la base fondamentale et à laquelle, sans raison aucune, elle avait survécu. C'est ce que nous allons démontrer dans ce mémoire.

I. — Théorie nouvelle de la dispersion par réfraction

La dispersion, dans les théories actuelles, est la décomposition de la lumière blanche consécutive à l'inégalité des vitesses de propagation des lumières simples.

D'après cette définition des auteurs, on ne fait aucune différence entre la dispersion dans un seul milieu et celle qui se rattache au passage de la lumière blanche d'un milieu moins réfringent dans un milieu plus réfringent.

Les lois de Descartes sur la réflexion et la réfraction donnent en particulier pour un rayon réfracté :

$$n = \frac{\sin i}{\sin i'},$$

i étant l'angle d'incidence, i' celui de réfraction. Ce rapport constant, quel que soit i, pour une lumière simple, varie, au contraire, pour une même valeur de i avec les différentes lumières simples incidentes, et donnent lieu à des indices différents représentés par n_λ, λ représentant la longueur d'onde du vide, si le rayon en venait.

Dès l'origine, la sagacité des savants s'est appliquée à retrouver les lois de Descartes.

Et c'est alors que s'est introduite, grâce à Newton et à Fermat, cette notion qui s'est perpétuée comme un article de foi jusqu'à nos jours, que, seules les vitesses différenciant les lumières simples, l'indice ne pouvait être fonction que des vitesses dans deux milieux inégalement réfringents.

En vain la théorie des ondulations s'est substituée à celle de l'émission, Fresnel, Cauchy et tous les auteurs modernes, pour arriver à la dispersion ne se sont occupés que d'établir des relations entre la vitesse de propagation d'une onde lumineuse et cette notion nouvelle, la longueur d'onde.

L'existence possible d'une dispersion dans le vide prouvait-elle que ce n'était peut-être pas à une telle relation qu'il fallait attribuer un tel phénomène. Cauchy ne s'embarrassait pas pour si peu et voyait de suite comment on devait choisir la fonction des forces dans le vide (répulsive et en raison inverse de la quatrième puissance de la distance) pour que sa formule générale devînt indépendante de la longueur d'onde,

quand on admettait l'absence de dispersion dans le vide. Il montrait ainsi que l'impossibilité de constater la dispersion par simple inégalité des vitesses de propagation dans la théorie des ondulations lui avait échappé. Et comme on l'observe facilement dans la réfraction, on devait de suite conclure que la dispersion par réfraction devait être attribuée à un autre phénomène qu'à l'inégalité des vitesses des lumières simples dans les deux milieux.

Plus tard, les recherches de M. Le Roux sur le renversement du spectre, de Beer sur la réflexion métallique, prouvaient en vain l'existence d'une dispersion anomale inexplicable, et montraient que les indices pouvaient être *plus petits* que l'unité. On n'en continuait pas moins à admettre que les indices étaient représentés par la relation :

$$n_\lambda = \frac{V}{v_\lambda},$$

d'où l'on devait conclure, dans le cas de la réflexion métallique, que $v_\lambda > V$, comme l'admettait Newton.

Enfin la possibilité d'une dispersion dans le vide, et les expérimentateurs n'ont cessé d'y songer, devait, dans le cas où l'on aurait cru pouvoir répondre affirmativement, changer les valeurs des indices actuels, et par suite montrer qu'ils ne pouvaient expliquer la dispersion ; malgré cette accumulation de preuves, la relation ci-dessus est la base de toutes les théories de la lumière.

Or nous avons déjà montré que cette relation, qui donne l'indice en fonction des seules vitesses, aurait dû disparaître quand la théorie des ondulations a remplacé celle de l'émission.

Nous allons maintenant montrer que l'on avait, dans le cas le plus général, c'est-à-dire si les lumières simples avaient une vitesse propre dans le vide comme dans les milieux pondérables :

$$n_\lambda = \frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{V_\lambda}{v_\lambda} \frac{T}{(T \pm \theta)},$$

que si l'on admettait qu'il n'y eût pas de dispersion dans le vide, on avait :

$$n_\lambda = \frac{\lambda}{l} = \frac{V}{v} \cdot \frac{T}{T \pm \theta},$$

V, v étant alors les vitesses de la lumière blanche. Et comme :

$$\frac{V_\lambda}{v_\lambda} = \frac{V_{\lambda'}}{v_{\lambda'}} = \ldots \frac{V}{v},$$

il en résultat que notre valeur de l'indice restait la même, qu'il y eût ou non dispersion dans le vide. Tandis que, dans la théorie actuelle, il ne resterait rien de la formule adoptée pour représenter la dispersion, le rapport des vitesses ne pouvant plus conduire qu'à la même réfraction.

Dans la théorie de l'émission, la loi qui régissait la propagation de la lumière était donnée par la seule relation, e étant l'espace, t le temps, v la vitesse :

$$e = vt,$$

de sorte que les lumières ne pouvaient être différenciées les unes des autres que par des vitesses propres de propagation, et par suite l'inégalité des vitesses de propagation était intimement liée à l'existence de lumières simples et inversement.

Dans la théorie des ondulations, il n'en était plus de même ; les lumières simples pouvaient être différenciées les unes des autres par les durées T, T′, T″... des oscillations propres à chacune, si bien que deux lumières simples pouvaient se propager avec la même vitesse et cependant celles-ci être nettement caractérisées, précisément par les espaces parcourus dans ces durées d'oscillation, ce sont les longueurs d'onde ; c'est ainsi que, dans le vide, on avait admis que l'on était en présence d'un milieu élastique, tel que l'on eût :

$$\lambda = VT, \qquad \lambda' = VT' \qquad \lambda'' = VT'',$$

où les lumières simples étaient nettement définies quoique les vitesses de propagation fussent égales.

De sorte que si dans la théorie de l'émission, on ne pouvait caractériser deux lumières simples, que par la relation :

$$\frac{e}{e'} = \frac{V}{V'};$$

dans la théorie des ondulations, celles-ci pouvaient être caractérisées par les rapports :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{T}{T'},$$

c'est-à-dire être indépendantes des vitesses de propagation.

Pour le vide, on ne pouvait donc différencier les lumières simples dans la théorie de l'émission, alors qu'on le faisait nettement dans la théorie des ondulations.

D'après cela, quand la lumière passait d'un milieu dans un autre milieu, les longueurs d'onde étant fonctions de deux variables, il était tout naturel de se demander si non seulement la vitesse, mais la durée des oscillations pouvaient, soit d'une manière permanente, soit provisoirement, être modifiées. On admettait, sans même songer un seul instant à modifier cette manière de voir, que dans le voisinage du plan de séparation de deux milieux, les valeurs de T, T′, T″... dussent rester *a priori* invariables, qu'elles n'avaient pu subir ne serait-ce que pendant un temps très court la moindre modification, même sous l'influence de l'attraction de la matière pondérable sur les molécules d'éther, phénomène admis par Newton.

Et tout cela, parce que la théorie *de l'émission* donnant conformément au théorème de Fermat :

$$n = \frac{V}{v}, \qquad n' = \frac{V}{v'}, \qquad n'' = \frac{V}{v''},$$

pour retrouver cette formule dans la théorie des ondulations exprimée comme nous y arriverons directement par :

$$n = \frac{\lambda}{l}, \qquad n' = \frac{\lambda'}{l'}, \qquad n'' = \frac{\lambda''}{l''},$$

il fallait admettre *a priori* que l'on eût :

$$\lambda = VT, \qquad l = vT.$$

L'idée n'était même pas venue aux auteurs que les formules des indices données dans la théorie de l'émission pouvaient être fausses. Elles l'étaient cependant si l'on démontrait, ce que l'on n'a cessé de chercher depuis, l'existence d'une dispersion dans le vide.

Si nous nous reportons à notre figure (1), nous voyons qu'une lumière se propageant dans deux milieux avec des vitesses V et v, les chemins parcourus en une seconde représentent le même nombre N de longueurs d'onde dans le même milieu.

$$e = N\lambda = NVT, \qquad e' = Nl = NvT,$$

Un observateur placé en O′ aura donc la même impression lumineuse que placé en O, (NT = 1).

Si la vitesse de la même lumière T venait à changer V′ dans le pre-

mier milieu, l'espace parcouru étant le même, on aurait nécessairement N′ longueurs d'onde au lieu de N, puisque

$$e = \text{NVT} = \text{N}'\text{V}'\text{T} = \text{N}'\lambda',$$

c'est ce que montre, dans la première figure, la troisième courbe des sinusoïdes.

Or, dans le second milieu, la condition fondamentale pour que la lumière perçue en O′ restât la même que celle perçue en O, est que l'on obtienne toujours N′T = 1.

Donc, si l'on avait l dans le second milieu et λ dans le premier milieu, on aura l' quand λ sera devenu λ';

Savoir :

$$e' = \text{N}'l' = \text{N}'v'\text{T},$$

et la vitesse v sera aussi devenue v'.

Ainsi :

$$\frac{\lambda}{l}\frac{[\text{V}]}{[v]} = \frac{\lambda'}{l'}\frac{[\text{V}']}{[v']},$$

les expressions [V] ne servant qu'à rappeler la vitesse du milieu.

Nous en concluons donc que, si l'on avait une longueur d'onde l et une vitesse v dans le second milieu, quand on a λ et V dans le premier milieu, le changement de vitesse des différentes lumières dans celui-ci entraînerait le changement de vitesse et de longueur d'onde dans le second.

Ainsi il suffirait que la dispersion dans le vide ait pu être démontrée pour qu'on eût la preuve que la formule :

$$n = \frac{\text{V}}{v_\lambda},$$

était inexacte. En effet, dans la théorie actuelle v_λ représente la vitesse actuelle, à laquelle il n'y a rien à changer.

Dans ces conditions, si V devenait V′, on aurait d'après le théorème de Fermat :

$$n = \frac{\text{V}'}{v_\lambda},$$

en contradiction avec la valeur numérique ci-dessus et la démonstration donnée plus haut.

La condition fondamentale que nous avons invoquée que NT reste constant dans tous les milieux traversés, c'est-à-dire que la lumière perçue soit la même pour un observateur placé soit en O soit en O′ (*fig.* 1), nous donnera de suite la relation :

$$\frac{V_\lambda}{v_\lambda} = \frac{V_{\lambda'}}{v_{\lambda'}} = \frac{V_{\lambda''}}{v_{\lambda''}} = \ldots$$

En effet, les espaces e, e' sont parcourus par les diverses lumières et l'on a :

$$e = N\lambda = NV_\lambda T, \qquad e' = Nl = Nv_\lambda T,$$
$$e = N'\lambda' = N'V_{\lambda'}T', \qquad e' = N'l' = N'v_{\lambda'}T',$$

d'où :

$$\frac{e}{e'} = \frac{V_\lambda}{v_\lambda} = \frac{V_{\lambda'}}{v_{\lambda'}} = \ldots$$

La *formule des indices devait donc être établie de manière à rester rigoureusement la même qu'il y eût ou non dispersion dans le vide.*

Or, si les longueurs d'onde dans le vide et les milieux réfringents étaient exprimées par les formules :

$$\lambda = VT, \qquad \lambda' = VT' \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1' = V'T'$$
$$l = vT\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right), \qquad l' = vT'\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right) \qquad \text{ou} \qquad l_1' = v'T'\left(1 \pm \frac{\theta}{T'}\right),$$

c'est-à-dire par des formules indiquant l'égalité ou l'inégalité des vitesses de propagation dans le vide et les milieux réfringents, comme pour une même lumière

$$\frac{V}{v} = \frac{V'}{v'},$$

on voit que l'on aura :

$$\frac{\lambda'}{l'} = \frac{\lambda_1'}{l_1'} = n',$$

c'est-à-dire que l'indice restera le même dans notre théorie que l'avenir prouve ou non la dispersion dans le vide. Au contraire, avec les formules actuelles, il faudrait tout changer si les expériences arrivaient à démontrer cette dispersion.

D'un autre côté, il faut remarquer que la formule actuelle des indices

n'a été acceptée que comme conséquence du théorème de Fermat. Or, dans la théorie des ondulations, nous démontrerons que la propagation des têtes de l'onde d'un point à un autre ne représente nullement la durée qu'il a fallu à la force vive qui caractérise la lumière pour s'établir à une certaine distance du centre de vibration, nous voyons que le théorème de Fermat parfaitement rationnel dans la théorie de l'émission, n'a plus aucun sens dans l'hypothèse des ondulations.

Et alors nous arrivons à cette conséquence incroyable qu'une formule invoquée à chaque instant en Optique;

Savoir :

$$n = \frac{V}{v_\lambda},$$

n'a jamais été démontrée. Nous verrons, en effet, que Cauchy, dans sa théorie de la dispersion, invoque cette relation, sans avoir essayé, comme l'avait fait Newton, d'en démontrer l'exactitude.

En vain, l'on dira que cette relation devait être exacte, puisque Cauchy, en s'en servant, arrive à sa formule fondamentale :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

vérifiée par l'expérience.

En premier lieu, nous ferons remarquer que Cauchy n'aurait jamais pu déduire cette formule de sa théorie, s'il n'avait pas raisonné avec l'idée préconçue de la retrouver quand même. En effet, la véritable formule à laquelle on arrive avec sa théorie est la suivante :

$$n = A + \frac{B}{a\lambda^2 + b} + \frac{C}{(a\lambda^2 + b)^2} + \dots$$

C'est ce que nous allons montrer.

Cauchy, en substituant les indices dans sa formule de la vitesse, ne peut exprimer l'indice en fonction de la *longueur d'onde du vide* que par la relation (Verdet, *L. d'Opt.*, t. II, p. 17) :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{V^2}\left(a + \frac{bn^2}{\lambda^2} + \frac{cn^4}{\lambda^4} + \dots\right).$$

Comme n est variable avec la longueur d'onde, on ne peut donc considérer cette formule que comme empirique. Et, en effet, on commence, dans le second membre, par supposer $n = 0$, d'où $n^2 = \frac{V^2}{a}$, valeur que l'on substitue dans le second membre, et c'est ainsi que, par des approximations successives, on établit, avec les valeurs connues des indices pour un milieu réfringent, les valeurs des constantes.

Remarquons que cette manière de faire est absolument illusoire ; en effet, comme on aurait pu, avec beaucoup plus de raison, en remarquant que dans les expériences de Beer, qui ont servi à la vérification des indices en fonction de la longueur d'onde $n > 1$, réduire le second membre à deux termes et non à un et faire $n = 1$, ce qui est plus rationnel que de supposer $n = 0$, comme première approximation on aurait eu :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{V^2}\left(a + \frac{bn^2}{\lambda^2}\right); \qquad \text{d'où :} \qquad n^2 = \frac{V^2\lambda^2}{a\lambda^2 + b}$$

et

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{V^2}\left(a + \frac{bV^2}{a\lambda^2 + b} + \frac{cV^4}{(a\lambda^2 + b)^2} + \dots\right).$$

Ainsi donc, on devait conclure que la formule de Cauchy conduisait à une relation de la forme :

$$n = A + \frac{B}{a\lambda^2 + b} + \frac{C}{(a\lambda^2 + b)^2} + \dots,$$

qui donne :

$$\frac{n - n'}{\dfrac{1}{a\lambda^2 + b} - \dfrac{1}{a\lambda'^2 + b}} = C^{te},$$

en contradiction avec les expériences de Beer

$$\frac{n - n'}{\dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda'^2}} = C^{te}.$$

Nous retrouverons encore une autre démonstration prouvant qu'en substituant les indices aux vitesses, on ne vérifie pas les expériences de Beer.

Il était donc inexact de dire que la formule des vitesses de Cauchy conduisait à une formule des indices vérifiée par l'expérience.

En effet, Cauchy trouvait directement avec sa théorie :

$$V^2 = A + \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} + \ldots,$$

où V et l sont les vitesses et les longueurs d'onde dans son éther fictif. Et, pour obtenir l'indice en fonction de la longueur d'onde du vide λ, il se servait de la relation parfaitement exacte $n = \frac{\lambda}{l}$, et par conséquent l'on devait conclure : ou la formule des vitesses établie par Cauchy était inexacte, dans un milieu réfringent, ou ayant été établie pour *un seul* milieu, il n'était pas permis de substituer les indices aux vitesses, substitution qui suppose l'existence de deux milieux de densité différente, pour lesquels la théorie de Cauchy n'avait pas été établie. Dans cette dernière hypothèse, on ne pouvait donc pas invoquer, ni retrouver, comme nous venons de le voir, les expériences de Beer.

Et par suite, Cauchy n'avait pas en réalité établi la théorie de la dispersion par *réfraction*, comme on l'a cru jusqu'ici, mais la seule théorie de la dispersion dans le vide. Seul le vide, en effet, convient à la propagation de la lumière *dans un seul milieu*, condition même posée par Cauchy.

Or, là encore, nous ne pouvons conclure comme ce savant.

Celui-ci a invoqué l'absence de dispersion dans le vide, pour déterminer la loi de répulsion des molécules d'éther. Il a trouvé la quatrième puissance de la raison inverse de la distance, Briot la sixième puissance. Ceci montre que ni Cauchy ni Briot, ni tous ceux qui les ont précédés ou suivis, n'ont songé, comme nous l'avons indiqué pour la première fois, que l'on ne pouvait invoquer l'existence ou la non-existence d'une dispersion du vide dans la théorie des ondulations. Parce que, dans cette théorie, on perd le bénéfice des espaces immenses traversés.

Ainsi des ondes pouvaient se propager avec des vitesses inégales sans que l'on fût dans la possibilité absolue de le constater par la décomposition de la lumière blanche. La décomposition, observée sans contestation possible par un observateur au repos, serait la preuve de l'exactitude de la théorie de l'émission.

Ni Fizeau, ni Foucault, ni M. Cornu ni M. Perrotin plus récemment,

n'ont signalé la décomposition de la lumière blanche dans leurs expériences.

Quant aux recherches de MM. Young et Forbes qui, en prenant comme source lumineuse une lampe électrique, ont cru constater, la vitesse de la roue dentée allant en croissant, une coloration des images en rouge quand elles augmentaient d'éclat, en bleu quand elles s'affaiblissaient, on ne saurait en conclure avec les auteurs que la vitesse de propagation était moindre pour les rayons rouges. En effet, en opérant directement avec un verre rouge ou une solution de nitrate de cuivre, les résultats sont contradictoires. Comme le dit M. Mascart, « la lecture attentive du mémoire de MM. Young et Forbes, où les différences varient de 0,7 à 4,6 0/0, ne paraît pas de nature à entraîner la conviction... La coloration des images était peut-être due simplement à des effets de diffraction sur les bords de l'orifice. »

En tous les cas, elle ne fut jamais signalée par les observateurs français.

La conséquence du rappel que nous venons de faire des recherches sur la vitesse de la lumière dans l'air (vide) et dans l'eau montre que ces recherches et les conclusions n'ont porté avec certitude que sur le rapport des vitesses de la lumière dans deux milieux.

Si donc V est la vitesse d'une lumière dans le vide, v la vitesse de la même lumière dans un milieu pondérable, on a prouvé que l'on avait $\frac{V}{v} > 1$; mais on *n'a pu directement montrer* jusqu'ici, même après les recherches de MM. Young et Forbes, que l'on eût :

$$V_r \gtrless V_0 \gtrless V_j, \ldots, \gtrless V_i$$

ou :

$$V_r = V_0 = V_j, \ldots, = V_i$$

Si l'on rapproche cette insuffisance à prouver directement l'inégalité des vitesses des différentes couleurs, de la démonstration que nous avons donnée dans notre introduction, montrant que l'hypothèse de l'égalité dans le vide et l'inégalité dans les milieux réfringents, conduirait ainsi à des lumières perçues dans les milieux réfringents totalement différentes de celles propagées dans le vide, nous devons donc conclure que, dans les milieux pondérables et le vide, on a simultanément des vitesses égales ou inégales.

Arrivons maintenant à la marche des ondes.

Si nous nous reportons à ce que nous avons indiqué dans l'introduction nous voyons (*fig.* 6) que le front de l'onde étant en αB, le rayon (1)

entre dans la zone d'attraction de Newton et parcourt le chemin αAA′ pendant que le rayon (2), lui, trace le chemin Bβ′B′. L'épaisseur de la zone étant très petite par rapport à la longueur d'onde, on peut donc

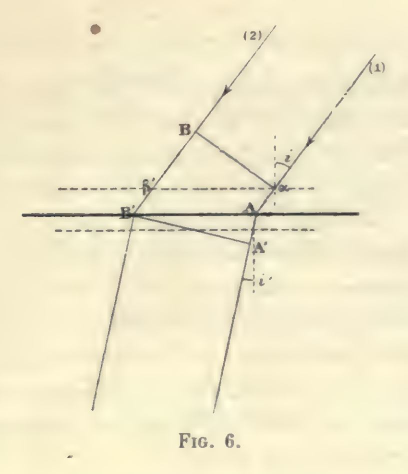


Fig. 6.

considérer le rayon (1) comme ayant été uniquement soumis à la zone d'attraction pendant son parcours, alors que le rayon (2) ne subissait pas cette attraction, pendant le même temps, B′β′ étant très petit par

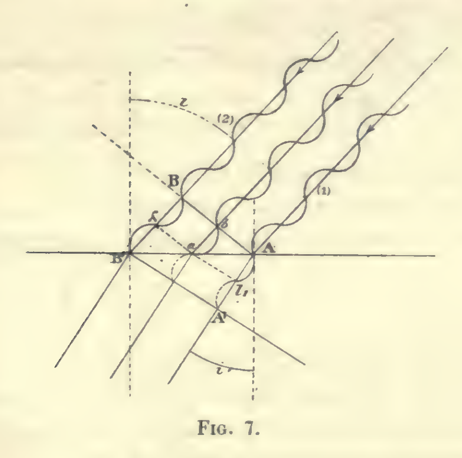


Fig. 7.

rapport à Bβ′. Autrement dit cette figure revient à celle-ci (*fig.* 7), dans laquelle, pour (1), on aura une durée d'oscillation (T — θ) et une vitesse v, celle du second milieu, et, pour (2), une durée d'oscillation T et une vitesse V, celle du premier milieu.

Donc, par le seul fait que le front de l'onde αB pénètre dans la zone obliquement les différents rayons du front de l'onde prendront des durées d'oscillation :

$$T - \theta, \quad T - \theta', \quad \ldots, \quad T - \theta'', \quad \ldots, \quad T,$$

dont l'intervalle maximum sera égal à θ. Et c'est avec ces valeurs différentes, comme des rayons de lumières différentes qu'à l'époque T, si l'on a pris AB tel que $BB' = \lambda$, le rayon (1) de lumière $(T - \theta)$ sera en A′ ayant parcouru dans le *même temps* T le chemin AA′ avec sa vitesse v de propagation. Dans l'air pour un rayon qui n'a pas subi l'attraction de la zone, la longueur d'onde est liée à la durée d'une oscillation qui est égale à la durée de propagation par la formule $\lambda = VT$. Au contraire, comme nous l'avons vu dans l'introduction, pour la zone d'attraction la durée de propagation de l'onde n'est pas égale à la durée d'oscillation. Pour (1), T est la durée de propagation et $T_1 = T - \theta$ la durée d'oscillation, et v étant la vitesse de propagation, la longueur d'onde l_1 sera donnée par la formule :

$$l_1 = vT_1 = v\,(T - \theta) = v\left(1 - \frac{\theta}{T}\right) T, \text{ à l'époque T.}$$

On voit, notre longueur d'onde étant égale à celle de Huyghens puisque $n = \frac{\lambda}{l_1}$, que celui-ci et tous les auteurs commettaient une erreur en regardant $v\left(1 - \frac{\theta}{T}\right)$ et représentant cette expression par v', comme donnant la vitesse de propagation de l'onde.

Les choses se passaient donc, par suite du changement de force élastique dans la zone d'attraction, comme si des lumières différentes

$$T - \theta, \quad T - \theta', \quad \ldots, \quad T,$$

arrivaient *en même temps* en A′B′ à l'époque T.

Une fois arrivées en même temps en A′B′ hors de la zone d'attraction, toutes ces lumières reprennent leur valeur commune T, la force élastique étant redevenue ce qu'elle était dans l'air.

Mais la longueur d'onde reste ce qu'elle a été dans la zone d'attraction, et l'on ne peut plus la trouver liée à la vitesse v et à la durée des oscillations T pour la formule $l = vT$, le coefficient $\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$ qu'elle

a acquis dans la zone d'attraction persiste, et l'on a :

$$l_1 = v.\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right).T.$$

Tel est le point capital qui différencie les longueurs d'onde des rayons qui n'ont parcouru qu'un milieu de ceux qui, en traversant deux milieux, ont subi les effets de l'attraction de la matière pondérable.

On voit donc que, comme on le faisait jusqu'ici, nous avons montré que tous les points du front de l'onde AB se sont trouvés transportés *en même temps* en A'B'. Mais la différence fondamentale est que nous avons tenu compte de l'attraction admise par Newton, sur les molécules d'éther vibrant dans le plan AB.

Comme nous démontrerons directement, en tenant compte de cette attraction, que l'on a :

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\lambda}{l_1} = n,$$

il en résulte que l_1 a la même valeur que dans les constructions d'Huyghens. Seulement, alors qu'Huyghens et tous les auteurs ont cru que $v\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$, qu'ils représentaient par v', exprimait la vitesse dans le second milieu, nous voyons qu'il n'en est rien, que celle-ci était égale à v, mais que la durée de l'oscillation du rayon (1), au lieu d'être égale à T, comme les auteurs le croyaient, se trouvait ramenée à $(T - \theta)$ dans la zone d'attraction.

Dans les théories actuelles on avait :

$$l_r = v_r T_r, \qquad l_0 = v_0 T_0, \qquad \ldots, \qquad l_i = v_i T_i,$$

et comme dans le vide :

$$\lambda_r > \lambda_0, \ldots, > \lambda_i; \qquad \text{d'où :} \qquad T_r > T_0, \qquad \ldots, \qquad > T_i,$$

par suite $\frac{\theta}{T_r} < \frac{\theta}{T_0} \ldots, < \frac{\theta}{T_i}$. Il en résulte donc que, dans la dispersion normale, pour obtenir $n_i > n_0, \ldots, > n_r$, savoir :

$$v_r > v_0, \quad \ldots, \quad > v_i,$$

avec la formule :

$$v_r = v\left(1 \pm \frac{\theta}{T_r}\right),$$

il faut prendre le signe —. On le voit facilement.

Dans la dispersion anomale où au contraire :

$$n_r > n_0, \quad \ldots, \quad > n_i$$

d'où dans les théories actuelles :

$$v_r < v_0, \quad \ldots, \quad < v_i,$$

il faut prendre le signe $+$ en *étant*, *en outre*, *obligé d'admettre* pour retrouver la relation des vitesses que $\frac{\theta}{T_r} > \frac{\theta}{T_0}, \ldots, > \frac{\theta}{T_i}$, c'est-à-dire que $\lambda_r < \lambda_0, \ldots, < \lambda_i$.

Ainsi, dans la théorie actuelle, on est obligé *d'admettre* une *interversion complète des longueurs d'onde pour expliquer* le changement des vitesses de propagation correspondant au changement des indices dans la dispersion anomale.

Dans notre théorie, les vitesses restant les mêmes, les valeurs de $\frac{\theta}{T_r}$, $\frac{\theta}{T_0}, \ldots$, restent *invariables*, par suite *invariables* les *longueurs d'onde*, et c'est simplement l'addition ou la soustraction de $\frac{\theta}{T_r}, \ldots$, qui permet d'expliquer que l'on a :

$$n_r \gtrless n_0.$$

Inutile de vouloir soutenir que l'on n'arrive à cette conclusion que parce que les vitesses ont été supposées sous la forme ci-dessus. En effet, dans la théorie actuelle, on a :

$$v_r = l_r \frac{v}{\lambda_r}, \qquad v_i = l_i \frac{v}{\lambda_i},$$

et dans le cas de dispersion normale ou anomale, on doit avoir :

$$v_r \gtrless v_i, \qquad \text{savoir :} \qquad l_r \gtrless l_i \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right),$$

comme $\frac{\lambda_r}{\lambda_i}$ est une constante, qui convient au vide, on voit donc que, dans la dispersion normale, on admettait que l'on eût, ce qui restait rationnel, les relations simultanées (1) et (2) suivantes.

Milieu réfringent :

$$l_r > l_0, \ldots, > l_i, \qquad (1)$$

vide :

$$\lambda_r > \lambda_0, \ldots, > \lambda_i; \qquad (2)$$

tandis que, dans la dispersion anomale, on était obligé d'admettre que l'on eût simultanément (2) et (3), qui sont contradictoires :

$$l_r < l_0, \ldots, < l_i. \qquad (3)$$

Cette simple remarque aurait dû, depuis longtemps, montrer l'inexactitude de la formule des indices.

Les dispersions normale et anomale s'expliquent donc très facilement. De plus, dans la réflexion métallique, si l'on avait admis que $l > \lambda$, ce qui exigeait que l'on eût le signe $+$ devant θ, on trouvait :

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n = \frac{\lambda}{l_1} = \frac{V}{v}\frac{1}{1+\frac{\theta}{T}};$$

il *aurait donc suffi pour que n fût plus petit que l'unité que :*

$$v\left(1+\frac{\theta}{T}\right) > V.$$

Donc il n'était nullement nécessaire que $v > V$. On arrivait en effet à cette *énormité* dans l'ancienne théorie qu'ayant, d'après les recherches de Beer (réflexion métallique) :

	Indice de réfraction	
	Cuivre.	Métal des miroirs.
Rouge	0,8865	1,2006
Orangé	0,9478	1,1631
Jaune	1,1140	1,1290
Vert	1,3057	1,1597
Bleu	1,3052	0,9876
Indigo	1,3151	0,9117
Violet	1,3090	0,9117

on devait conclure que, pour le *même milieu*, la vitesse de propagation des lumières pouvait être *plus grande*, PUIS *plus petite* que dans le vide ou inversement.

On aimait mieux admettre cette conséquence et dire avec Verdet (*Opt.*, t. II, p. 597) :

« Ces résultats sont de nature à surprendre et à jeter du doute sur la théorie (de la réflexion métallique), car il semble étrange que, dans les métaux, l'indice de réfraction soit inférieur à l'unité, c'est-à-dire que la vitesse de propagation soit plus grande que dans le vide. »

On préférait écrire ces lignes plutôt que de supposer qu'une idée fausse, celle de l'inégalité des vitesses des différentes lumières, quand on avait admis l'égalité dans le vide, eût pu survivre à la théorie de l'émission, dont elle en était la base fondamentale. Elle devait bien être fausse cependant, puisqu'elle était incompatible avec la théorie des ondulations, ne pouvait expliquer la dispersion anomale et la réflexion métallique, était en contradiction avec l'absence supposée exacte de dispersion dans le vide, qui n'avait jamais pu être démontrée expérimentalement par Fizeau, Foucault, M. Cornu, ni même avec certitude par les recherches plus récentes de MM. Young et Forbes.

II. — Critique du mémoire de Cauchy

Nous allons donc reprendre la théorie de la dispersion sur cette nouvelle base, l'égalité des vitesses de propagation des différentes lumières. Or, comme la théorie développée par Cauchy était fondée sur cette inégalité, nous allons analyser son mémoire en montrant le point faible de sa théorie. L'expérience prouve que la dispersion s'observe avec la plus grande facilité à la surface de séparation de deux milieux différents, quand la lumière blanche passe obliquement de l'un dans l'autre, de l'air dans l'eau, par exemple, c'est la loi de Descartes.



Conformément à la manière de faire de Newton, mais en la modifiant pour la théorie des ondulations, nous aurons dans deux plans *infiniment*

rapprochés du plan de séparation de deux milieux de forces élastiques F, à étudier l'attraction (*fig.* 5) de la matière pondérable sur les molécules en vibration.

Seule la composante f, dans le plan de vibration, interviendra pour modifier dans une zone infiniment petite la valeur de F, qui, dans une oscillation complète, passera par des valeurs $F - f$, $F + f$. En admettant, en outre, que les ondes se propagent, conformément à la formule de Newton $V^2 = \frac{e}{d}$ dans le premier milieu, $v^2 = \frac{e}{d'}$ dans le second milieu, d, d' étant les densités de l'éther, on constatera que le *centre* d'oscillation se déplacera dans cette zone, précisément comme Newton l'admettait pour sa molécule lumineuse.

Telle sera la nouvelle théorie de la dispersion que nous développerons ; on voit qu'elle ne ressemble en rien à celle donnée par Cauchy et tous les auteurs modernes, et la seule qui existe aujourd'hui.

C'est dans un *seul milieu* que les lumières se propagent avec des vitesses de propagation fonctions de la longueur d'onde. Telle est l'unique hypothèse admise aujourd'hui. On voit pourquoi Cauchy et tous les auteurs modernes se sont rattachés désespérément à cette inégalité des vitesses des lumières simples de l'ancienne hypothèse de l'émission. Car, sans cette inégalité, plus de théorie de la dispersion.

Si :

$$\varepsilon = \delta \sin \frac{2\varpi}{T} t, \tag{1}$$

est le mouvement vibratoire en un point et, si l'on admet qu'à celui-ci répond une onde qui se propage avec une vitesse fonction de la longueur d'onde, savoir :

$$\lambda = v_\lambda T, \tag{2}$$

il en résultera que l'on aura en un autre point distant du premier par la longueur x un mouvement vibratoire :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{3}$$

Si F est la force élastique pour l'unité de déplacement d'une molécule vibrante, supposée constante dans le milieu, par suite la même à une distance x de l'origine, on aura :

$$m \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = F\varepsilon, \tag{4}$$

d'où, en différentiant deux fois ε par rapport à t :

$$(5) \qquad m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{4\varpi^2}{T^2}\varepsilon,$$

et par suite (Verdet, *L. d'Opt.*, t. I, p. 493),

$$F = -\frac{4\varpi^2 m}{T^2} = -\frac{4\varpi^2 m}{\lambda^2}V^2.$$

Telle est la formule fondamentale, telle est la démonstration à l'aide de laquelle les auteurs depuis Fresnel dans la double réfraction, Cauchy dans la dispersion jusqu'à nos jours, ont établi la relation qui existe *entre la vitesse de propagation d'une onde plane et la force élastique dans un seul milieu de densité uniforme.*

Arrivons au mémoire de Cauchy.

Cauchy considère l'éther emprisonné dans un corps pondérable, comme un éther fictif de densité constante, différente, par conséquent, de l'éther du vide. Il avait parfaitement le droit d'agir ainsi dans sa théorie pour simplifier le problème. Il admet encore que cet éther a la constitution du milieu qu'il remplace. Cela posé :

Soit :

$$x,\ y,\ z, \text{ la position d'une masse } m,$$
$$x+\Delta x, \quad y+\Delta y, \quad z+\Delta z, \quad \text{celle d'une masse voisine } \mu,$$

l'attraction ou la répulsion (nous verrons qu'elle sera répulsive) d'une masse éthérée sur une autre sera, sachant que $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$:

$$m\mu f(r),$$

et $m\Sigma\mu f(r)$ celle de toutes les masses qui entourent m; à l'état d'équilibre :

$$m\Sigma\mu f(r) = 0; \quad \text{d'où:} \quad \Sigma\mu f(r)\frac{\Delta x}{r} = 0, \quad \Sigma\mu f(r)\frac{\Delta y}{r} = 0, \quad \ldots$$

Supposons que la masse m, sous l'influence d'une force étrangère aux masses, soit déplacée de ε, dont ξ, η, ζ, seraient les composantes ; alors la position de la masse m devient :

$$(x+\xi), \quad (y+\eta), \quad (z+\zeta),$$

et celle de la masse μ :

$$(x+\xi)+\Delta(x+\xi), \quad (y+\eta)+\Delta(y+\eta), \quad (z+\zeta)+\Delta(z+\zeta),$$

en même temps que la distance r devient $r+\rho$, sachant que :

$$(r+\rho)^2=(\Delta x+\Delta\xi)^2+\ldots,$$

d'où, en négligeant ρ^2 et $\Delta\xi^2$:

$$r^2+2r\rho=\Delta x^2+2\Delta x\Delta\xi+\ldots,$$

savoir :

$$r\rho=\Delta x\Delta\xi+\Delta y\Delta\eta+\Delta z\Delta\zeta,$$

par suite l'action de toutes les masses sur m, X, Y, Z, étant les composantes de la force élastique pour l'unité de déplacement, sera :

$$X\varepsilon=m\Sigma\mu f(r+\rho)\frac{\Delta(x+\xi)}{r+\rho},$$
$$Y\varepsilon=m\Sigma\mu f(r+\rho)\frac{\Delta(y+\eta)}{r+\rho},$$
$$Z\varepsilon=m\Sigma\mu f(r+\rho)\frac{\Delta(z+\zeta)}{r+\rho},$$

les composantes de la force élastique qui tend à ramener m dans sa position d'équilibre étant d'autant plus grandes que ε est plus grand. Si l'on borne le développement de $f(r+\rho)$ au premier terme en ρ, très petit par rapport à r, il vient :

$$f(r+\rho)=f(r)+\rho f'(r),$$

et

$$X\varepsilon=m\Sigma\mu\left\{[f(r)+\rho f'(r)]\frac{\Delta x+\Delta\xi}{r}\left(1-\frac{\rho}{r}\right)\right\},$$

d'où, en négligeant les termes en ρ^2 et $\rho\Delta\xi$ du même ordre de grandeur et se rappelant que $\Sigma\mu f(r)\dfrac{\Delta x}{r}=0$:

$$X\varepsilon=m\Sigma\mu\left[f(r)\frac{\Delta\xi}{r}+\left(f'(r)-\frac{f(r)}{r}\right)\rho\frac{\Delta x}{r}\right]=m\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

avec : $\rho = \frac{\Delta x \Delta \zeta + \Delta y \Delta \eta + \Delta z \Delta \zeta}{r}$,

d'où :

$$X_\varepsilon = m\Sigma\mu \left[\left\{ \frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta x^2}{r^2} \right\} \Delta\xi + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \cdot \frac{\Delta x \Delta y}{r^2} \cdot \Delta\eta + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta x \Delta z}{r^2} \cdot \Delta\zeta \right].$$

Si l'on pose :

$$L = \frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta x^2}{r^2}, \qquad R = \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta x \Delta y}{r^2},$$

$$M = \frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta y^2}{r^2}, \qquad Q = \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta x \Delta z}{r^2},$$

$$N = \frac{f(r)}{r} + \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta z^2}{r^2}, \qquad P = \left[f'(r) - \frac{f(r)}{r} \right] \frac{\Delta y \Delta z}{r^2},$$

il viendra :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = X_\varepsilon = m\Sigma\mu \left[L\Delta\xi + R\Delta\eta + Q\Delta\zeta \right]$$

$$m \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_\varepsilon = m\Sigma\mu \left[R\Delta\xi + M\Delta\eta + P\Delta\zeta \right]$$

$$m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z_\varepsilon = m\Sigma\mu \left[Q\Delta\xi + P\Delta\eta + N\Delta\zeta \right]$$

ξ, η, ζ, étant les composantes du déplacement infiniment petit ε.

Telles sont les formules générales.

Supposons, pour simplifier, comme Cauchy, que l'onde se propage suivant l'axe de x, et que le mouvement vibratoire soit parallèle à l'axe de y, les formules ci-dessus, d'après les auteurs, deviendront, sachant alors que ε se réduit à sa composante η :

$$m \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y_\eta = m\Sigma\mu \,.\, M\Delta\eta,$$

avec :

$$\eta = \delta \sin \frac{2\varpi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right),$$

qui donne :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = - \frac{4\varpi^2}{T^2} \delta \sin \frac{2\varpi}{T} \left(t - \frac{x}{V} \right),$$

d'où (Verdet, *L. d'Opt.*, t. I, p. 493) :

$$Y = -\frac{4\varpi^2 m}{T^2} = -\frac{4\varpi^2 m}{\lambda^2} V^2,$$

sachant que : $\lambda = VT$.

D'un autre côté

$$\eta + \Delta\eta = \delta \sin\frac{2\varpi}{T}\left(t - \frac{x+\Delta x}{V}\right) = \eta \cos\frac{2\varpi}{TV}\Delta x + \delta\cos\frac{2\varpi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right)\sin\frac{2\varpi}{TV}\Delta x,$$

d'où :

$$\Delta\eta = \varepsilon\left(\cos\frac{2\varpi}{TV}\Delta x - 1\right) + \delta\cos\frac{2\varpi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right)\sin\frac{2\varpi}{TV}\Delta x,$$

et

$$\Delta\eta = 2\eta \sin\frac{2\varpi}{TV}\Delta x + \sqrt{\delta^2 - \eta^2}\sin\frac{\varpi}{TV}\Delta x \cos\frac{\varpi}{TV}\Delta x.$$

Comme on doit prendre des sommes $\mu M \Delta\eta$, il est bien clair, dit Cauchy, que, si le milieu n'est pas hémiédrique, la somme des valeurs répondant à $\pm\,\Delta x$ sera nulle, autrement dit que l'on aura :

$$\Delta\eta = 2\eta \sin\frac{2\varpi}{TV}\Delta x.$$

Et comme

$$\sin\frac{2\varpi}{TV}\Delta x = \frac{\varpi^2}{T^2V^2}\Delta x^2 - \frac{1}{3}\frac{\varpi^4}{T^4V^4}\Delta x^4 + \frac{2}{45}\frac{\varpi^6}{T^6V^6}\Delta x^6 - \ldots,$$

il viendra :

$$Y\eta = -\frac{4\varpi^2}{T^2}\eta = 2m\Sigma\mu M\eta\left[\frac{\varpi^2}{T^2V^2}\Delta x^2 - \frac{1}{3}\frac{\varpi^4}{T^4V^4}\Delta x^4 + \ldots\right],$$

d'où :

$$(a) \quad V^2 = -\frac{1}{2}m\Sigma\mu M\left[\Delta x^2 + \frac{1}{3}\frac{\varpi^2}{T^2V^2}\Delta x^4 - \frac{2}{45}\frac{\varpi^4}{T^4V^4}\Delta x^6 + \ldots\right].$$

Telle est la démonstration de Cauchy et de tous les auteurs.

Si, avec Cauchy, on met pour M sa valeur, et que l'on remplace TV par la longueur d'onde λ, la formule précédente devient (Verdet, *Leçons d'Optique*, t. II, p. 25) :

$$(b) \qquad V^2 = d\left\{\frac{\lambda^2}{3\varpi}[r^2 f(r)]_\infty - \frac{2}{15}\varpi\,[r^4 f(r)]_0\right\},$$

d étant la densité de l'éther fictif dans lequel se propage la lumière.

Voyons comment Cauchy traite maintenant le problème.

Pour tenir compte de l'absence de dispersion dans le vide, il commence par poser :

$$[r^2 f(r)]_\infty = o,$$

de manière à faire disparaître dans (b) le terme en λ^2. Or l'on peut s'étonner de cette manière d'opérer, attendu qu'ayant posé aussi bien dans le vide que dans un éther fictif :

$$\lambda = VT,$$

on en tire :

$$V^2 = \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{\lambda^2}{2\varpi^2} F_1,$$

expression qui se présente précisément sous la forme du premier terme du second membre de (b). Donc il était inexact de faire disparaître le terme en λ^2. Ce que l'on devait écrire, c'est que V^2 resterait constant, quel que fût λ. Or si l'on remarque, comme nous l'avons déjà indiqué, que le mouvement oscillatoire est pendulaire, et qu'un pendule de rayon a exécuterait le même mouvement dans le temps T, par suite que l'on aurait indifféremment (p. 18) :

$$T = \varpi \sqrt{\frac{2}{F_1}} = 2\varpi \sqrt{\frac{a}{e}},$$

e étant l'élasticité, il en résulte que l'on aura pour T la relation $F_1 = \frac{2e}{a}$, et pour T′, $F'_1 = \frac{2e}{a'}$, d'où :

$$V^2 = \frac{e}{4\varpi^2} \frac{\lambda^2}{a} = \frac{e}{4\varpi^2} \frac{\lambda'^2}{a'} = \dots$$

Par conséquent, dans le vide, il ne s'agissait pas de faire disparaître les termes en λ^2, mais d'exprimer que les rapports $\frac{\lambda^2}{a}$ devaient rester constants. D'un autre côté, dans notre introduction, nous avons montré que la formule $V^2 = \frac{\lambda^2}{2\varpi^2} F_1$ n'était nullement incompatible avec celle de Newton $v^2 = \frac{e}{d}$ qui conduit à l'égalité des vitesses de propagation ;

Il était donc inexact d'écrire que, dans le vide, on avait :

$$V^2 = -\frac{2}{15} \varpi d \left[r^4 f(r)\right]_0.$$

Mais, quand une même lumière passe du vide dans un milieu pondérable, la valeur de T reste constante dans la théorie des auteurs. C'est-à-dire que la valeur de T reste invariable, *quelle que soit la densité de l'éther*. Ni Cauchy, ni Fresnel, ni aucun des auteurs qui ont invoqué la formule générale de l'élasticité optique :

$$\text{(F)} \qquad F_1 = \frac{2\varpi^2}{T^2} = \frac{2\varpi^2}{\lambda^2} V^2,$$

n'ont songé à établir *cette restriction* quand ils ont pris la durée d'une oscillation T égale à la durée $\frac{V}{\lambda}$ de propagation d'une onde ; donc la formule (b) de Cauchy devait s'écrire dans le vide :

$$(b') \qquad \frac{V^2}{\lambda^2} = d \left\{ \frac{1}{3\varpi} \left[r^2 f(r)\right]_\infty - \frac{2}{15} \frac{\varpi}{\lambda^2} \left[r^4 f(r)\right]_0 \right\},$$

et

$$(b'') \qquad \frac{v^2}{l^2} = d' \left\{ \frac{1}{3\varpi} \left[r^2 f(r)\right]_\infty - \frac{2}{15} \frac{\varpi}{l^2} \left[r^4 f(r)\right]_0 \right\},$$

dans un éther fictif avec la condition :

$$(c) \qquad \frac{1}{T^2} = \frac{V^2}{\lambda^2} = \frac{v_\lambda^2}{l^2},$$

si T reste constant sur le plan de séparation des deux milieux.

On tire de là :

$$(d - d')\frac{1}{3\varpi}\left[r^2 f(r)\right]_\infty = \frac{2}{15}\varpi\left(\frac{d'}{l^2} - \frac{d}{\lambda^2}\right)\left[r^4 f(r)\right]_0 = \frac{2}{15}\varpi\left(n^2 - \frac{d}{d'}\right)\frac{d'}{\lambda^2}\left[r^4 f(r)\right]_0.$$

Avec une autre lumière $\frac{1}{T'}$, on aurait eu de même :

$$(d - d')\frac{1}{3\varpi}\left[r^2 f(r)\right]_\infty = \frac{2}{15}\varpi\left(n'^2 - \frac{d}{d'}\right)\frac{d'}{\lambda'^2}\left[r^4 f(r)\right]_0,$$

il vient donc :

$$\frac{n^2 - \frac{d}{d'}}{\lambda^2} = \frac{n'^2 - \frac{d}{d'}}{\lambda'^2} = \frac{n''^2 - \frac{d}{d'}}{\lambda''^2} = \ldots,$$

d'où :

$$(d) \qquad \frac{n^2 - n'^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} = \frac{n^2 - n''^2}{\lambda^2 - \lambda''^2} = \ldots;$$

or les expériences de Beer ont vérifié que l'on avait :

$$\frac{n^2 - n'^2}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda'^2}} = \frac{n^2 - n''^2}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda''^2}} = \ldots$$

Donc les relations (d), déduites de la formule (b) de Cauchy, sont fausses.

Par conséquent, en admettant que la théorie et la formule (b) de Cauchy fussent exactes, on voit que l'on commencerait par en tirer cette conséquence que les relations (c) sont inexactes. Autrement dit que le $\frac{v_\lambda^2}{l^2}$ tiré de (c) n'est nullement le $\frac{v^2}{l^2}$ de la formule (b''). Si donc on admet qu'au lieu de (c) on ait les relations :

$$(c') \qquad \frac{1}{T^2} = \frac{V^2}{\lambda^2}, \qquad \frac{1}{T_1^2} = \frac{v^2}{l^2},$$

$\frac{v}{l^2}$ ayant la valeur de (b''), c'est-à-dire v désignant comme V du vide, la vitesse de la lumière blanche et que l'on fasse :

$$T_1 = T\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right),$$

en posant :

$$\frac{d}{\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)} = d_T \qquad \ldots, \qquad \frac{d}{\left(1 \pm \frac{\theta}{T'}\right)} = d_{T'}$$

on aura comme précédemment :

$$\frac{n^2 - \frac{d_T}{d'}}{\lambda^2} = \frac{n'^2 - \frac{d_{T'}}{d'}}{\lambda'^2} = \ldots = \frac{n^2 - n'^2 - \frac{d}{d'}\left[\frac{1}{\left(1 \mp \frac{\theta}{T}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 \mp \frac{\theta}{T'}\right)^2}\right]}{\lambda^2 - \lambda'^2}.$$

Mais comme ici :

$$n = \frac{\lambda}{l} = \frac{V}{v}\frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}}; \quad \text{d'où :} \quad \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}} = n\frac{v}{V}, \quad \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T'}} = n'\frac{v}{V},$$

il vient :

$$\frac{n^2 - n'^2 - \frac{1}{d'}(d_T - d_{T'})}{\lambda^2 - \lambda'^2} = \frac{n^2 - n'^2}{\lambda^2 - \lambda'^2}\left(1 - \frac{d}{d'}\frac{v^2}{V^2}\right),$$

on retombe encore sur les relations (d).

Par conséquent, que l'on admette que l'on ait (c) ou (c'), les formules (a) et (b) de Cauchy ne pouvaient permettre de retrouver les relations de Beer, contrairement à ce que l'on avait enseigné. Il était facile de le prévoir.

La formule :

$$F_1 = \frac{2\varpi^2}{T^2} = \frac{2\varpi^2}{\lambda^2}V^2,$$

de l'élasticité optique, admise par Cauchy, et qui l'a conduit à :

$$V^2 = df[\lambda^2, \varphi(r)],$$

pouvait-elle s'appliquer à la vitesse de la lumière dans les milieux RÉFRINGENTS ?

L'hypothèse fondamentale sur laquelle les auteurs se sont basés pour établir cette relation est que la force élastique F est rigoureusement *constante* dans le milieu considéré.

Or, comme il est impossible de concevoir que la lumière se propage dans un milieu réfringent sans admettre qu'elle soit venue du vide, ou de l'air, c'est-à-dire sans supposer, ce qui est la réalité des faits, qu'elle ait passé du vide dans un milieu pondérable ; comme Cauchy lui-même, dans sa théorie, substitue l'indice à la vitesse, il en résulte que son analyse, établie pour la vitesse dans *un seul milieu*, parfaitement exacte dans ces conditions, *devient fausse* dès qu'abandonnant son point de départ il veut l'appliquer à la vitesse de la lumière dans un milieu réfringent.

Autrement dit, on ne peut concevoir la lumière, sauf celle des espaces célestes, sans admettre qu'elle ait traversé au moins *deux milieux*, qu'elle ait passé du vide dans un milieu réfringent. C'est pour cela que Newton n'a jamais conçu de dispersion sans réfraction, alors que, dans

la théorie de l'émission, la dispersion dans le vide, si elle eût existé, eût été facile à vérifier.

Or, si l'on admet deux milieux, la théorie de Cauchy est déjà un peu en défaut, puisque la densité de l'éther varie à partir de la surface de séparation des deux milieux. Mais la variation de la densité de l'éther n'introduit pas de changement dans l'élasticité de l'éther, soit du vide, soit du milieu réfringent ; c'est sans doute pour cela que Cauchy et tous les auteurs ont cru pouvoir légitimement se servir de la formule des indices pour vérifier celle des vitesses établie pour un milieu de densité uniforme.

Mais ce que Cauchy et tous les auteurs ont oublié, c'est un phénomène très net que Newton avait établi, et que l'on ne pouvait négliger dans la théorie des ondulations, sous prétexte qu'il avait conduit Newton à un résultat inexact dans la théorie de l'émission. Ce phénomène sera l'attraction de la molécule d'éther en vibration par la matière pondérable dans le voisinage du plan de séparation des deux milieux. C'est cette attraction qui, dans la zone de Newton, modifie la durée T des oscillations. De sorte que l'hypothèse fondamentale de Cauchy et de tous les auteurs, de la constance de F et T, cessant de se vérifier, toute sa théorie cesse d'être exacte à partir du moment où, pour vérifier sa formule, il fait appel aux indices de réfraction.

Si, dans le vide, la longueur d'onde n'est fonction que de deux variables :

$$\lambda = V \,.\, T,$$

dans les milieux réfringents, la longueur d'onde est fonction de trois variables, la vitesse v, la durée T de l'oscillation, et l'expression $\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$ due uniquement à l'attraction de la matière pondérable à la surface de séparation des deux milieux :

$$l_1 = v \,.\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right).\, T.$$

Si, la formule de l'élasticité :

$$F\varepsilon = -\frac{4\varpi^2 m}{\lambda^2}\varepsilon V^2$$

est *virtuellement* exacte, elle ne peut, en dehors des phénomènes de diffraction, dans la marche de la lumière s'appliquer qu'au vide

des espaces célestes, pour lequel F a pu être considéré comme invariable. Mais comme, dans la théorie des ondulations, on perd, ainsi que nous l'avons montré, le bénéfice des espaces immenses traversés, on n'a donc aucun moyen de vérifier si la formule de Cauchy :

$$V^2 = df[\lambda^2, \varphi(r)],$$

est bien exacte. Cauchy, en admettant qu'il n'y eût pas de dispersion dans le vide, a montré qu'il n'avait pas vu que la formule ordinaire revenait à :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{\lambda}\right),$$

dans laquelle Δ est moindre qu'une longueur d'onde. Et tout ce qu'il a donné sur la loi de répulsion des molécules d'éther à la 4e puissance, pour que la vitesse fût indépendante de la longueur d'onde, doit être rejetée.

Toute son analyse de la dispersion se résume donc à l'obtention d'une formule qui expérimentalement ne peut s'appliquer qu'au vide, et qui même pour celui-ci n'est pas susceptible de vérification.

Elle conduisait peut-être à la dispersion dans le vide par inégalité de propagation des lumières simples ; elle ne donnait dans aucun cas la dispersion consécutive à la réfraction, puisqu'elle admettait ce qu'il fallait tout d'abord démontrer, la loi des sinus, et qu'elle attribuait aux milieux réfringents une formule qui ne s'appliquait plus quand la lumière passait du vide dans ceux-ci.

En effet une molécule d'éther qui vibrera à la surface de séparation de deux milieux de densités différentes ne pourra pas être supposée régie par la formule :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

si

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \frac{t}{T}$$

est l'état vibratoire à l'origine des ondes. Car, nous montrerons que si l'on revient à la manière de faire de Newton en l'appliquant aux ondulations, l'attraction de la matière pondérable sur le rayon qui se propage dans l'éther du vide devient sensible dans la zone d'attraction de Newton et modifie l'état vibratoire de la molécule lumineuse. Si bien que F devient Φ dans cette zone, f étant la composante de

l'attraction dans le plan de vibration et que l'on a :

$$\Phi = F\left[1 - \frac{3}{4}\frac{f^2}{F^2} - \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 16}\frac{f^4}{F^4} - \dots\right].$$

De plus, l'état vibratoire dans cette zone est donné par la formule :

$$\varepsilon' = \delta' \sin 2\varpi \frac{t}{\tau},$$

ayant toujours à chaque instant :

$$\Phi = -\frac{4\varpi^2}{\tau^2}.$$

De sorte que l'hypothèse fondamentale de l'invariabilité de F et T dans la théorie des ondulations est démontrée inexacte à la surface de séparation des deux milieux. On voit le peu de valeur qu'il fallait attacher à la théorie de la dispersion par réfraction de Cauchy qui, après avoir établi d'une façon remarquable les formules générales de l'élasticité, avait admis, ce qu'il fallait démontrer, que, dans un *premier milieu* (puisque Cauchy invoque la formule de l'indice), l'état vibratoire étant exprimé à l'origine des ondes par $\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \frac{t}{T}$, le serait dans le second milieu après un chemin $x + y$ parcouru avec des vitesses V et v par la formule :

$$\varepsilon = \delta \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{y}{l}\right).$$

Or, d'après ce qui a lieu à la surface de séparation des deux milieux, nous voyons que cette formule ne pouvait représenter l'état vibratoire à une certaine distance $(x + y)$ de l'origine des ondes.

On voit ce qu'il reste du mémoire sur la dispersion de Cauchy. Arrivons à notre théorie.

III. — Milieu hémiédrique ou non hémiédrique

Ayant :

$$\varepsilon = \sin 2\varpi \frac{t}{T}.$$

Il convient de montrer qu'il faut attribuer un signe à T, comme à ε :

En effet, la molécule vibrante étant, en O, à l'état de repos, son déplacement *initial* pourrait être dirigé suivant A ou B. On doit donc, *dès l'origine* du temps, tenir compte de ce fait et prévoir un mouvement vibratoire $+\varepsilon$ ou $-\varepsilon$ pour t voisin de zéro ; par suite on devra compter le temps, soit de $t = o$ à $t = +\frac{T}{4}$, soit de $t = o$ à $t = -\frac{T}{4}$. Or la

Fig. 8.

valeur effective de la force élastique sera évidemment indépendante de la direction *initiale* du mouvement vibratoire *dans un milieu non hémiédrique*. C'est précisément ce que nous donne la formule :

$$F = -\frac{4\varpi^2}{T^2},$$

montrant que F est indépendant du signe de T, c'est-à-dire de la direction initiale du mouvement vibratoire, et, par suite, nous montrant que l'on admet implicitement une oscillation dans un milieu non hémiédrique. Or, si nous supposons que la lumière passe du vide dans ce milieu non hémiédrique, il en résultera que dans la zone d'attraction la relation (p. 10)

$$\Phi = -\frac{4\varpi^2}{T^2\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)^2} = -\frac{4\varpi^2}{T^2}\left[1 \mp 2\frac{\theta}{T} + 3\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 \mp 4\left(\frac{\theta}{T}\right)^3 + \cdots\right]$$

ne saurait contenir des termes en $\left(\frac{\theta}{T}\right)$ à des puissances impaires. Dans

un milieu non hémiédrique, on aura donc :

$$\Phi = -\frac{4\varpi^2}{T^2}\left[1 + 3\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 + 5\left(\frac{\theta}{T}\right)^4 + \dots\right].$$

Cherchons maintenant la véritable expression de l'indice et il nous sera alors facile de trouver la seconde relation fondamentale entre l'indice et la longueur d'onde.

Tous les auteurs modernes ont admis *a priori* la relation : $n = \frac{V}{v_\lambda}$, qui n'était démontrée ni théoriquement dans la théorie de la dispersion, ni expérimentalement, l'expérience ayant conduit pour une lumière à $V > v$, mais ayant été impuissante à prouver l'inégalité de propagation des lumières simples.

Nous allons donc, comme Newton, chercher à déterminer l'indice, en tenant compte de l'attraction de la matière pondérable, non plus sur une molécule d'éther susceptible de marcher dans le sens de la propagation, mais vibrant dans un plan perpendiculaire.

C'est ce que nous allons faire en montrant que l'expression de l'indice est nécessairement de la forme :

$$n = \frac{V}{v}\frac{1}{\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)},$$

lorsque l'on tient compte et de la formule générale de Newton sur la

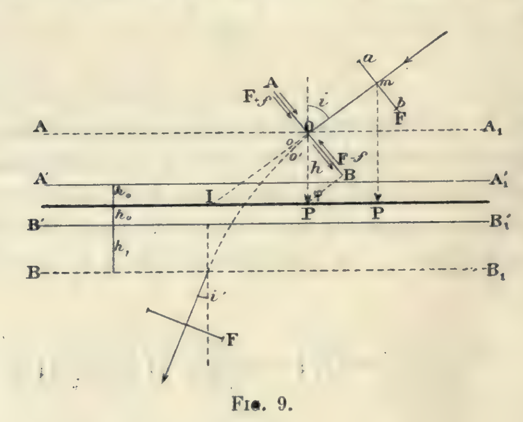


Fig. 9.

propagation des ondes dans les milieux élastiques et de l'attraction de la matière pondérable sur les molécules d'éther en vibration.

L'épaisseur de la zone à partir de laquelle l'attraction de la matière pondérable commence à se faire sentir et est représentée par une résultante effective φ étant infiniment petite, si h est la distance de la molécule d'éther m au milieu pondérable, celui-ci peut être considéré comme indéfini par rapport à h. L'attraction, dans tous les plans menés par h, sera analogue à celle dans le plan du papier. Et, dans celui-ci, l'attraction de tout le bloc sera analogue à celui d'une épaisseur infiniment petite. Il suffit donc de calculer l'attraction d'une file de molécules pondérables agissant en raison inverse du carré de la distance sur la molécule d'éther m.

Or, en électricité, on sait, d'après le calcul et les expériences de Biot et Savart, que l'action d'un fil indéfini sur une molécule est exprimée par :

$$\frac{km}{h},$$

on aura par suite :

$$\varphi = \frac{km}{h}.$$

La molécule, ne pouvant vibrer que dans un plan perpendiculaire à la direction du rayon incident, on aura donc, pour la force f, contraire à la force de répulsion F des molécules d'éther entre elles ou de même sens :

$$f = \varphi \sin i = \frac{km}{h} \sin i, ;$$

on a encore :

$$x \cos i = h ; \qquad \text{d'où :} \qquad f = \frac{km}{x} \operatorname{tang} i.$$

Si, d'un autre côté, on nomme V, la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu élastique conformément à la formule de Newton

$$V^2 = \frac{e}{d},$$

c'est-à-dire indépendante de la longueur d'onde, on aura $x = V.t$, il viendra $f = \frac{km}{V} \frac{\operatorname{tang} i}{t}$, et dans le second milieu $f' = \frac{km}{v} \operatorname{tang} i'$; on voit

Fig. 10.

que la molécule d'éther étant soumise à une force constante $F = -\frac{4\varpi^2}{T^2}$,

pendant qu'elle effectue ses oscillations en dehors de la zone d'attraction, se trouve au contraire maintenant, sous l'influence d'une force essentiellement différente, à droite et à gauche du centre d'oscillation, savoir $F - f$ et $F + f$.

Si $\frac{T'}{4}$ est la durée que met la molécule pour effectuer sa plus grande élongation à droite, sous l'influence de la force $F - f$, $\frac{T''}{4}$ sa plus grande élongation à gauche, sous l'influence de la force $F + f$, la durée τ d'une oscillation complète pour parcourir le chemin mA, Am, mB, Bm, sera :

$$\tau = \frac{T'}{2} + \frac{T''}{2},$$

or :

$$\frac{T'}{2} = \frac{\varpi}{\sqrt{F - f}}, \qquad \frac{T''}{2} = \frac{\varpi}{\sqrt{F + f}}.$$

Mais, f variant de o à φ et devant être toujours beaucoup plus petit que F, sans quoi il n'y aurait plus oscillation, mais entraînement de la molécule dans le plan perpendiculaire à la propagation des ondes, on a donc :

$$\tau = \frac{\varpi}{\sqrt{F}}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f}{F}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f}{F}}}\right] = \frac{2\varpi}{\sqrt{F}}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{f^2}{F^2} + \frac{5.7}{8.16}\frac{f^4}{F^4} + \ldots\right].$$

Ainsi, dans la zone d'attraction, on peut regarder le mouvement oscillatoire comme régi à chaque instant par la formule habituelle :

$$\varepsilon' = \delta' \sin 2\varpi \frac{t}{\tau},$$

et une force Φ, constante dans un intervalle de temps infiniment petit, sollicitant la molécule d'éther conformément à la relation :

$$\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2} = \Phi\varepsilon',$$

à condition de poser :

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{F}}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{f^2}{F^2} + \frac{5.7}{8.16}\frac{f^4}{F^4} + \ldots\right],$$

qui donne :

$$\Phi = F\left[1 - \frac{3}{4}\frac{f^2}{F^2}\right],$$

en supposant négligeables les termes en $\frac{f^4}{F^4}$, ...

On voit que, dans cette démonstration, nous avons supposé, dans la formule $f = \frac{km}{x} \operatorname{tang} i$, la valeur de i sensiblement constante pour le même milieu. Ceci admet implicitement, i devant varier de i à i' dans le trajet total du centre d'oscillation de l'onde, que nous n'étudions le mouvement oscillatoire dans le premier milieu que de A en A′ (*fig.* 9) et, par suite, la valeur de F variera seulement de :

$$\frac{km}{h}\sin i \qquad \text{à} \qquad \frac{km}{h_0}\sin i,$$

ou de :

$$f = \frac{km}{h}\sin i \qquad \text{à} \qquad f' = \frac{km}{h_0}\sin i.$$

Au-delà de A, l'action de la matière pondérable est insensible, donc $\varphi = 0$ et $f = 0$.

Par conséquent :

$$\tau = T.$$

La valeur de τ sera donc essentiellement variable dans la zone AA′ ; donc, quand nous parlerons de la valeur de l'oscillation dans la zone d'attraction, il ne peut être question que d'une valeur moyenne T_1. Dans ces conditions nous poserons :

$$T_1 = T\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right).$$

De même f_1 désignera la moyenne des différentes valeurs de f et Φ_1 de Φ ; c'est dans ces conditions que l'on peut admettre que l'on a, non plus dans un intervalle de temps infiniment court, mais quelconque, dans la zone d'attraction :

$$\varepsilon' = \delta' \sin 2\varpi \frac{t}{T_1}, \qquad \frac{d^2\varepsilon'}{dt^2} = \Phi_1 \varepsilon', \qquad \Phi_1 = F\left[1 - \frac{3}{4}\frac{f_1^2}{F^2}\right].$$

Cela posé, si l'on multiplie par $2d\varepsilon'$ les deux termes de l'expression

en $\frac{d^2\varepsilon'}{dt^2}$, il viendra, en intégrant et remplaçant Φ_1 par sa valeur Φ à l'entrée de la zone quand $\tau = T$:

$$\left[\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 - F\varepsilon'^2\right] = -\frac{3}{2}\int\frac{f^2}{F}\varepsilon' d\varepsilon' = \frac{3}{8}\frac{1}{\varpi^2}\int\frac{f^2}{T^2}\varepsilon' d\varepsilon',$$

et en remplaçant f par sa valeur, multipliant les deux membres par $\cos^2 i$, on aura :

$$\left[\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 - F\varepsilon'^2\right]\cos^2 i = \frac{3}{8}\frac{km}{\varpi^2}\left(\frac{\sin i}{VT}\right)^2\int\frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2}.$$

Si l'on avait $\varepsilon' = \varepsilon$, auquel cas la molécule vibrerait en dehors de la zone d'attraction, l'expression $\left[\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 - F\varepsilon'^2\right]$ serait *constante*. La variation de cette valeur avec l'obliquité (i) du rayon incident est donc uniquement due à l'attraction de la matière pondérable sur la molécule d'éther en vibration ; c'est le travail effectué sous l'influence de l'attraction de la matière pondérable seule.

Or $\left[\left(\frac{d\varepsilon'}{dt}\right)^2 - F\varepsilon'^2\right]\cos^2 i$ est la composante horizontale de ce travail, et est perpendiculaire à la résultante des forces d'attraction. Elle en est donc indépendante, quand i varie dans un même milieu et, par suite, constante. On a donc :

$$(m) \qquad \left(\frac{\sin i}{VT}\right)^2\int\frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2} = C^{te}.$$

Cela posé, admettons, à l'exemple de Lorentz, que la densité de l'éther ne devienne uniforme dans le milieu pondérable qu'à partir d'une certaine épaisseur h_1, il en résultera que, dans la couche d'air h_0, elle commencera, sous l'influence de l'attraction, à devenir plus grande que dans l'air, que, dans la même couche h_0 dans le milieu pondérable, elle pourra être considérée comme sensiblement la même, puis ira successivement en augmentant jusqu'à la valeur définitive, qu'elle acquiert à partir d'une certaine profondeur h_1. Dans ces conditions, on pourra considérer l'éther et la matière pondérable, jusqu'à cette épaisseur h_1, comme formant un éther fictif de densité intermédiaire entre celle du vide et celle du milieu réfringent à partir de h_1. Par conséquent l'attraction de la matière au-dessous de la ligne BB_1 agit encore sur le mouvement oscillatoire de

cet éther fictif, exactement comme nous venons de l'indiquer pour l'éther de la première zone d'attraction dans l'air.

Dans le mouvement oscillatoire τ fonction de l'attraction se maintient dans cette deuxième zone où l'on a encore $\Phi_1 = -\frac{4\varpi^2}{\tau^2}$ et $\frac{d^2\varepsilon_1'}{dt^2} = \Phi_1 \varepsilon_1'$, jusqu'à la limite inférieure de cette zone où Φ_1 redevient égal à F et τ à T.

Si donc v est la vitesse dans cette seconde zone, T_1 la valeur moyenne de τ, en appliquant la formule ci-dessus (m), on aura :

$$\left(\frac{\sin i'}{vT_1}\right)^2 \int \frac{\varepsilon_1' d\varepsilon_1'}{t^2} = C^{te}.$$

Cela posé, les zones des deux milieux étant infiniment minces, on peut admettre la même valeur pour la résultante des attractions sur les molécules d'éther des deux zones.

Les composantes du travail dues à l'attraction et parallèles à la surface de séparation conserveront donc la même valeur, et dans chaque milieu et dans les deux milieux, puisque la résultante des actions de la matière pondérable reste normale à la surface. Les deux constantes ont donc la même valeur dans les deux milieux, et l'on aura :

$$\left(\frac{\sin i}{VT}\right)^2 \int \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2} = \left(\frac{\sin i'}{vT_1}\right)^2 \int \frac{\varepsilon_1' d\varepsilon_1'}{t^2},$$

d'où :

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = n = \frac{VT}{vT_1} \frac{\sqrt{\int \frac{\varepsilon_1' d\varepsilon_1'}{t^2}}}{\sqrt{\int \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2}}} = \frac{\lambda}{l_1} \frac{\sqrt{\int \frac{\varepsilon_1' d\varepsilon_1'}{t^2}}}{\sqrt{\int \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2}}}.$$

Ainsi c'est le rapport des *longueurs d'onde* et non des vitesses, qui s'est nécessairement introduit dans cette démonstration. Pour expliquer la dispersion, nous avons vu que l'on avait :

$$T_1 = T\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right).$$

D'un autre côté, pour retomber sur la relation des expériences $n = \frac{\lambda}{l_1}$, il suffit que les coefficients sous le signe $\int$ deviennent sensiblement

égaux, ce qui exige que ε' soit voisin de ε'_1, savoir Φ sensiblement égal à Φ_1, c'est-à-dire que le mouvement oscillatoire soit le même dans la première et la seconde zone. Ceci peut être admis si la densité de l'éther va en croissant de la surface à la profondeur, comme l'admettait Lorentz. Dans ces conditions, on retrouve la formule des indices en fonction des longueurs d'onde, telle que les auteurs l'avaient admise. En ce qui concerne les vitesses, on voit que l'on a :

$$n = \frac{V}{v} \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}},$$

dans laquelle V est la vitesse dans le premier milieu et v dans le second. On se rend compte de l'erreur commise jusqu'ici lorsqu'on écrivait : $n = \frac{V}{v'}$, et que l'on enseignait que v' représentait la vitesse dans le second milieu. Il n'en était rien, puisque l'on devait admettre que l'on avait :

$$v' = v\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right),$$

v étant la vitesse dans le second milieu et $\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$ un coefficient dont dépend la dispersion.

Dans les substances fluorescentes il est probable que l'hypothèse de Lorentz ne se vérifie pas. Dans ces conditions on a alors :

$$n = \frac{\lambda}{l_1} \frac{\sqrt{\int \frac{\varepsilon'_1 d\varepsilon'_1}{t^2}}}{\sqrt{\int \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{t^2}}},$$

et le dernier coefficient ne pouvant plus se réduire à l'unité, on voit pourquoi la loi de Descartes ne s'applique plus.

Il nous est facile maintenant d'arriver à la formule générale de la dispersion, après avoir fait remarquer que pour la première fois nous avons démontré la formule des sinus, en partant d'une hypothèse rationnelle, celle de Newton sur l'attraction, et n'invoquant pas comme Fermat « une cause finale », « hors de la portée de l'intelligence humaine », et qui, de plus, ne convenait qu'à la théorie de l'émission.

IV. — Dispersion normale et anomale

Dispersion normale

Ayant :

$$n = \frac{V}{v} \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}}.$$

Nous avons vu que, pour la dispersion normale, on devait prendre le signe —, d'où :

$$n = \frac{V}{v} \frac{1}{1 - \frac{\theta}{T}},$$

comme :

$$\frac{1}{1 - \frac{\theta}{T}} = 1 + \frac{\theta}{T} + \frac{\theta^2}{T^2} + \frac{\theta^3}{T^3} + \dots,$$

il vient :

$$n = \frac{V}{v}\left(1 + \frac{\theta}{T} + \frac{\theta^2}{T^2} + \frac{\theta^3}{T^3} + \dots\right).$$

Si le milieu n'est pas hémiédrique, les termes en $\frac{\theta}{T}, \frac{\theta^3}{T^3}, \dots,$ ne sauraient exister, comme nous l'avons montré (p. 53); on a donc :

$$n = \frac{V}{v}\left(1 + \frac{\theta^2}{T^2} + \frac{\theta^4}{T^4} + \dots\right).$$

Si l'on est en présence de lumière blanche et que l'on suppose l'égalité des vitesses dans le vide, ce qui entraîne l'égalité dans le milieu réfringent, on aura :

$$VT = \lambda, \qquad VT' = \lambda', \qquad \dots,$$

La formule ci-dessus donnera, pour une lumière monochromatique,

l'indice en fonction de la longueur d'onde du vide λ :

$$\text{(C)} \qquad n_\lambda = \frac{V}{v}\left(1 + \frac{V^2\theta^2}{\lambda^2} + \frac{V^4\theta^4}{\lambda^4} + \cdots\right);$$

on voit comme nous sommes arrivé facilement à cette formule.

Ayant démontré que V étant constant pour toutes les lumières dans le vide, v l'est aussi dans le milieu pondérable, si nous prouvons que θ reste le même, quelle que soit la longueur d'onde, nous aurons ainsi retrouvé la formule fondamentale à laquelle Cauchy croyait être arrivé dans sa théorie, sans avoir pu déterminer du reste la valeur des constantes :

$$n_\lambda = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots$$

Avec une autre lumière, nous aurions :

$$\text{(C')} \qquad n_{\lambda'} = \frac{V}{v}\left(1 + \frac{V^2\theta'^2}{\lambda'^2} + \frac{V^4\theta'^4}{\lambda'^4} + \cdots\right).$$

Si l'on réduit la formule des indices au second rang, on aura :

$$n_{\lambda'} - n_\lambda = \frac{V^3}{v}\left(\frac{\theta'^2}{\lambda'^2} - \frac{\theta^2}{\lambda^2}\right).$$

Or on peut toujours prendre deux indices assez voisins pour que l'on puisse supposer $\theta' = \theta$. On aura par suite :

$$\frac{n_{\lambda'} - n_\lambda}{\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{V^3}{v} \cdot \theta^2.$$

Et l'on sait que, dans la méthode de Beer, la vérification expérimentale a montré que l'on avait très sensiblement :

$$\frac{n_{\lambda'} - n_\lambda}{\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{n_{\lambda''} - n_\lambda}{\frac{1}{\lambda''^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{n_{\lambda''} - n_{\lambda'}}{\frac{1}{\lambda''^2} - \frac{1}{\lambda'^2}} = C^{te}.$$

On voit donc que, si l'on nomme C_λ cette constante variable avec chaque matière réfringente et servant à la caractériser, on aura :

$$\theta = \frac{1}{V}\sqrt{C_\lambda \cdot \frac{v}{V}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta}{T} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{C_\lambda \cdot \frac{v}{V}}.$$

Si l'on remarque que la relation ci-dessus donne encore pour une autre longueur d'onde :

$$\frac{n_{\lambda''} - n_{\lambda'}}{\frac{1}{\lambda''^2} - \frac{1}{\lambda'^2}} = \frac{V^3}{v} \theta'^2 = C_{\lambda'},$$

on voit que $C_\lambda = C_{\lambda'}, \ldots$ et : $\theta = \theta' = \theta'', \ldots$

Nous avons donc retrouvé la formule générale de la dispersion d'une façon complète et sans avoir fait appel, comme Cauchy, à une relation non démontrée entre l'indice et le rapport des vitesses de la lumière dans les deux milieux. Si l'on substitue θ dans la formule (C), on aura, sachant que $\frac{V^3}{v} \theta^2 = C$:

$$(C'') \qquad n_\lambda = \frac{V}{v} + \frac{V}{v} C \frac{1}{\lambda^2} + \frac{v}{V} C^2 \frac{1}{\lambda^4} + \ldots,$$

dans laquelle :

$$C = \frac{n_{\lambda'} - n_\lambda}{\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda^2}}.$$

Ainsi, alors que Cauchy ne connaissait *aucun des coefficients* de sa formule, nous les connaissions tous. Ici on a simultanément :

$$\lambda > \lambda', \qquad n_{\lambda'} - n_\lambda > 1.$$

C'est la dispersion normale.

Dispersion anomale

Actuellement on range sous cette dénomination le renversement des couleurs du spectre et la dispersion due à la réflexion métallique.

Nous avons vu que nous avions dans ce cas :

$$n_\lambda = \frac{\lambda}{l_1} = \frac{V}{v} \frac{1}{1 + \frac{\theta}{T}},$$

et que :

$$\lambda < l_1 \qquad \text{si} \qquad v\left(1 + \frac{\theta}{T}\right) > V.$$

Donc nous pouvions expliquer que la longueur d'onde dans un tel milieu serait plus grande que dans le vide, sans cependant conclure que la vitesse de la lumière blanche fût plus grande que dans le vide. La théorie actuelle arrive à cette dernière conclusion, alors que toutes les expériences ont prouvé que la vitesse de la lumière était plus grande dans l'air que dans l'eau, dans l'eau que dans le verre, etc.

Aussi on arrivait à mettre en doute, comme nous l'avons rappelé, les recherches sur la réflexion métallique, qui conduisaient pour l'indice à des valeurs plus petites que l'unité.

Notre formule générale nous donnera ici, pour la dispersion anomale, quand on prend $\frac{\theta}{T}$ avec le signe $+$

$$(D) \qquad n_\lambda = \frac{V}{v}\left[1 - \frac{V^2\theta^2}{\lambda^2} + \frac{V^4\theta^4}{\lambda^4} - \frac{V^6\theta^6}{\lambda^6} + \dots\right],$$

qui nous montre que, pour certaines longueurs d'onde, n_λ ne peut être plus grand que l'unité et plus petit pour d'autres, si θ est constant mais que le fait est possible si θ est variable avec les longueurs d'ondes, V restant toujours plus grand que v, et par suite, nous prouve que les recherches de Beer sur la réflexion métallique se trouvaient bien exactes. La seule chose inadmissible (et pour arriver à expliquer si mal la dispersion) était d'avoir conservé cette idée surannée, base de la théorie de l'émission, que la lumière blanche aurait une vitesse propre dans le vide et non dans les milieux pondérables.

On tire de là :

$$n_{\lambda'} - n_\lambda = k\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda'^2}\right) - kV^2\theta^2\left(\frac{1}{\lambda^4} - \frac{1}{\lambda'^4}\right) + \dots,$$

on voit donc que l'on a simultanément :

$$\lambda > \lambda', \qquad n_{\lambda'} - n_\lambda < 1 \qquad \text{(Dispersion anomale.)} \quad (\theta = \text{const.})$$

Ainsi les rayons rouges, dont les longueurs d'onde sont plus grandes que celles des rayons violets, donnent un spectre normal, en général, et anomal dans la vapeur d'iode, comme M. Le Roux l'a indiqué pour la première fois. Il y a renversement des couleurs du spectre. Remarquons qu'il n'est nullement nécessaire que $v\left(1 + \frac{\theta}{T}\right)$ soit plus grand

que V. Il suffit d'avoir le signe $+$ devant $\frac{\theta}{T}$. Par conséquent le renversement des couleurs du spectre est un phénomène autre que celui de la réflexion métallique, qui donne, pour certaines couleurs et certains métaux un indice plus petit que l'unité.

Dans cette dispersion anomale, et ceci la différenciera de la précédente, θ sera essentiellement variable avec les longueurs d'onde.

En prenant l'exposant — 1 pour simplifier et

$$V\theta_r = k\lambda_r^{-1}, \quad \ldots, \quad V\theta_x = k\lambda_x^{-1}, \quad \ldots, \quad V\theta_i = k\lambda_i^{-1}$$

qui donnera :

$$\theta_r < \theta_0, \quad \ldots, \quad < \theta_x, \quad \ldots, \quad < \theta_i$$

la couleur intermédiaire x correspondant à un indice égal à 1, on déterminera k par la relation :

$$1 = \frac{V}{v} \frac{1}{1 + \frac{k}{\lambda_x^2}},$$

l'interpolation des expériences permettant facilement de trouver la longueur d'onde λ_x correspondant à un indice égal à 1.

On aura donc :

$$k = \lambda_x^2 \left(\frac{V}{v} - 1\right) = \lambda_x^2 \,.\, \alpha.$$

D'un autre côté, les indices correspondant à une valeur θ seront donnés, par exemple, par la formule générale :

$$n_r = \frac{V}{v} \frac{1}{1 + \frac{V\theta_r}{\lambda_r}} = \frac{V}{v} \frac{1}{1 + \frac{k}{\lambda_r^2}} = \frac{V}{v} \frac{\lambda_r^2}{\lambda_r^2 + \alpha\lambda_x^2}.$$

Entre deux indices extrêmes on aura donc :

$$n_r - n_i = \frac{V}{v} \frac{\alpha\lambda_x^2}{(\lambda_r^2 + \alpha\lambda_x^2)(\lambda_i^2 + \alpha\lambda_x^2)} [\lambda_r^2 - \lambda_i^2].$$

Par suite :

$$n_r > n_x > n_i,$$

et comme $n_x = 1$, les indices commenceront par être plus grands que l'unité, puis plus petits en allant du rouge au violet, c'est le cas de la réflexion métallique sur le métal des miroirs. Pour celui-ci, λ_x corres-

pondait à une lumière intermédiaire entre le vert et le bleu. Et l'on voit que nous expliquons que l'indice devient plus petit que l'unité en admettant que $V > v$ conformément aux expériences de Foucault, et *pour toutes les lumières*,

Si l'on pose :

$$V\theta_r = k\lambda_r^3, \qquad \ldots, \qquad V\theta_x = k\lambda_x^3, \qquad \ldots, \qquad V\theta_i = k\lambda_i^3\,;$$

ce qui donne :

$$\theta_r > \theta_0, \qquad \ldots, \qquad > \theta_x, \qquad \ldots, \qquad > \theta_i;$$

k sera obtenu par la relation :

$$1 = \frac{V}{v}\frac{1}{1 + k\lambda_x^2},$$

savoir :

$$k = \frac{1}{\lambda_x^2}\left(\frac{V}{v} - 1\right) = \frac{1}{\lambda_x^2}\cdot\alpha$$

on aura donc ici pour la formule des indices :

$$n_r = \frac{V}{v}\frac{1}{1 + \frac{V\theta_r}{\lambda_r^2}} = \frac{V}{v}\frac{1}{1 + k\lambda_r^2} = \frac{V}{v}\frac{\lambda_x^2}{\lambda_x^2 + \alpha\lambda_r^2}$$

d'où :

$$n_r - n_i = \frac{V}{v}\frac{\alpha\lambda_x^2}{(\lambda_x^2 + \alpha\lambda_r^2)(\lambda_x^2 + \alpha\lambda_i^2)}[\lambda_i^2 - \lambda_r^2].$$

Par conséquent ici nous avons :

$$n_r < n_x < n_i,$$

comme dans la réflexion métallique sur le cuivre. C'est entre l'orangé et le jaune que se trouve la longueur d'onde λ_x pour laquelle $n_x = 1$.

Dans cette discussion, nous avons pris -1 et $+3$ pour les exposants de λ_x afin de simplifier. En principe, on aurait dû prendre :

$$V\theta_x = k\lambda_x^{-p} \qquad V\theta_x = k\lambda_x^{q}$$

et chercher les valeurs de p et q qui conviennent le mieux. L'expression des indices se trouve donc ramenée aux deux formes suivantes dans cette dispersion anomale :

$$n_r = \frac{V}{v}\left[1 - \alpha\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_r}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_r}\right)^4 - \ldots\right]$$

$$n_r = \frac{V}{v}\left[1 - \alpha\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_x}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_x}\right)^4 - \ldots\right].$$

Parmi les nombreux auteurs qui ont été amenés à s'occuper de la dispersion anomale, Cristoffel avait donné une formule dans laquelle l'indice était exprimé en fonction précisément du rapport $\frac{\lambda_x}{\lambda_r}$, c'est-à-dire qu'il était obligé de faire appel à un indice intermédiaire n_x de longueur d'onde λ_x. Comme la formule ci-dessus s'appliquait à la réflexion métallique, l'indice intermédiaire se trouvait égal à l'unité. Mais, si nous avions voulu exprimer qu'il s'agissait d'un milieu quelconque et que c'était entre les indices n_r et n_x seuls que les valeurs de θ auraient été en décroissant d'après la même loi que précédemment, nous aurions posé :

$$n_x = \frac{V}{v} \frac{1}{1 + \frac{k}{\lambda_x^2}},$$

et en faisant :

$$\frac{V}{v} = R, \qquad \text{puis} \qquad \alpha = \frac{R - n_x}{n_x}$$

dans la première de nos formules nous aurions eu, comme Cristoffel, l'indice exprimé en fonction de n_x et de $\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_r}\right)$.

La seconde de nos formules nous montre que, lorsque les valeurs de θ vont en croissant à partir d'une certaine couleur jusqu'au violet, l'indice est, dans ces conditions, exprimé par des termes proportionnels à une puissance paire de la longueur d'onde. Or on sait que depuis longtemps certains auteurs avaient été amenés à ajouter de tels termes à la formule ordinaire des indices et à écrire comme Redtenbacher :

$$\frac{1}{n^2} = a + b\lambda^2 + \frac{c}{\lambda^2},$$

que l'expérience n'a pu vérifier, du reste, que d'une façon très imparfaite. Or nos formules ci-dessus nous montrent que de telles relations ne sauraient théoriquement exister. Il peut se faire que dans un milieu, entre les indices n_r et n_x les valeurs de θ aillent en décroissant, puis en croissant de n_x à n_i ; dans ces conditions, les indices seraient donnés en fonction de n_x et $\frac{\lambda_x}{\lambda_r}$; comme Cristoffel l'admettait, entre n_r et n_x, puis en fonction de n_x et $\frac{\lambda_i}{\lambda_x}$, comme le montre notre seconde formule, entre n_x et n_i ; mais dans aucun cas l'indice n_j d'une substance ne saurait

être exprimé en fonction de n_x, $\frac{\lambda_x}{\lambda_j}$, $\frac{\lambda_j}{\lambda_x}$. On peut donc regarder comme théoriquement inadmissibles toutes les formules qui ont été données par lesquelles on a, *au hasard*, essayé d'exprimer les indices des substances à dispersion anomale par la relation :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + ,.., + c\lambda^2 + ...$$

$\frac{B}{\lambda^2}$ et $c\lambda^2$ étant incompatibles, dans une même formule d'indice.

Pour terminer, une réflexion s'impose qui nous expliquera les résistances de Biot et Poisson à admettre autrefois la théorie des ondulations introduite par Young et Fresnel, puis Cauchy.

Ils ont dû avoir la plus grande répugnance à accepter, comme les créateurs de cette théorie, que, dans *tous* les problèmes, on substituât un éther fictif, c'est-à-dire un seul milieu élastique, à deux milieux.

En dehors de la diffraction, il n'est aucune question d'Optique dans laquelle on ne soit pas obligé de regarder la lumière comme passant du vide dans le milieu pondérable soumis à l'expérimentation. Or substituer analytiquement, comme Cauchy, dans la dispersion *par réfraction*, à ces deux milieux pour lesquels la densité de l'éther est différente, un éther fictif de densité uniforme, était déjà incorrect. Mais on allait plus loin, on admettait que l'attraction de la matière pondérable sur les molécules d'éther était assez puissante pour en modifier la densité dans les milieux réfringents, puis, par une véritable aberration de l'esprit, on ne tenait aucun compte de cette attraction sur les molécules de l'éther du vide en vibration dans le voisinage immédiat de ces milieux. Il semblait que l'on eût voulu, de parti pris, ne rien retenir de l'ancienne démonstration de Newton. Ce n'était pas une raison cependant parce qu'une molécule d'éther, au lieu de se déplacer dans la direction du rayon incident, vibrait dans un plan perpendiculaire à celui-ci, pour que l'on fût autorisé à oublier l'attraction newtonienne du corps réfringent sur les molécules d'éther du vide en vibration dans son voisinage immédiat. En introduisant cette attraction, nous avons montré que, dans la formule des indices, le dénominateur représentait non pas la vitesse dans le milieu réfringent, mais la vitesse multipliée par le coefficient $\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$, c'est-à-dire $v\left(1 \pm \frac{\theta}{T}\right)$, que les auteurs avaient pris pour une vitesse; et alors, si toutes les lumières se propageaient également vite dans le vide, comme il en était nécessairement ainsi dans les milieux pondérables, nous pouvions nous rendre compte cependant

de la dispersion par réfraction, ce que l'on ne pouvait plus faire dans la théorie actuelle.

De même pour la réflexion métallique; les auteurs, en admettant toujours la formule des indices, devaient conclure que, dans certains milieux, la vitesse de propagation devait être plus grande que dans le vide. C'était rejeter toutes les expériences de Foucault. Notre théorie nous prouvait que l'on pouvait avoir :

$$v\left(1 + \frac{\theta}{T}\right) > V,$$

tout en ayant :

$$v < V,$$

et par suite qu'il n'y avait pas à mettre en doute les recherches de Beer. Enfin, s'il s'agissait de lumière polarisée rectilignement, on représentait par :

$$\varepsilon = \sin 2\varpi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right),$$

l'état vibratoire d'une molécule d'éther dans un corps réfringent, admettant que $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = F\varepsilon$ était la relation qui lie le mouvemement à la force élastique en un point quelconque du milieu. Nous avons montré comment celle-ci se modifiait, quand on tient compte de l'attraction du milieu sur l'éther du vide qui vibre dans son voisinage.

Pour une molécule en vibration, les choses se passent comme si la force élastique F, la même dans le vide et le milieu réfringent, prenait une valeur moyenne $\Phi_1 = F\left[1 - \frac{3}{4}\frac{f_1^2}{F^2}\right]$ dans la zone de séparation des deux milieux. L'hypothèse fondamentale de l'invariabilité de la FORCE ÉLASTIQUE, qu'il ne faut pas confondre avec l'élasticité, depuis la source jusqu'à la molécule en vibration ne se vérifiant plus, toutes les conséquences déduites pour un éther fictif *ne pouvaient donc plus s'appliquer à la plupart des questions d'Optique.*

Nous l'avons prouvé pour la dispersion par réfraction; nous le montrerons encore en reprenant l'étude de la dispersion rotatoire.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

I. — Théorie nouvelle de la dispersion par réfraction

II. — Critique du mémoire de Cauchy

III. — Milieu hémiédrique ou non hémiédrique

IV. — Dispersion normale et anomale

Tours. — Imprimerie Deslis Frères.

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE

DE LA

LUNETTE DE GALILÉE

SAINT AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE.

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE

DE LA

LUNETTE DE GALILÉE

PAR

M. G. QUESNEVILLE

DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR AGRÉGÉ A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHARMACIE
DIRECTEUR DU *Moniteur scientifique*

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

6 et 12, rue de la Sorbonne

1902

(NOUVELLE DIOPTRIQUE DES RAYONS VISUELS)

THÉORIE NOUVELLE
DE LA
LUNETTE DE GALILÉE

AVANT-PROPOS

Nous avons donné en 1900 dans le *Moniteur scientifique* une introduction sur ce sujet qui s'adressait pour la première partie aux ophtalmologistes et pour la lunette de Galilée aux physiciens. Nous laissons aujourd'hui de côté ce qui regarde la première partie, trop étendue pour pouvoir être encore publiée, et nous ne nous occuperons que de la théorie nouvelle de la lunette de Galilée, car il est urgent de voir disparaître de l'enseignement officiel l'accumulation d'erreurs auxquelles a donné lieu cette théorie et dont la figure ci-contre est la synthèse.

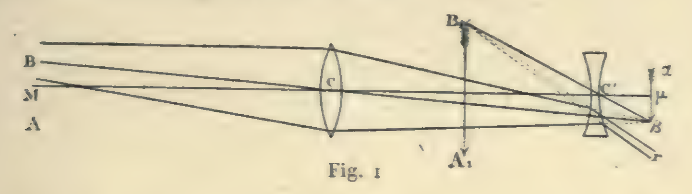


Fig. 1

Le lapsus que nous avons signalé pour la première fois, lapsus de construction géométrique commis de tout temps, par suite d'une idée erronée sur les rayons qui pénètrent dans l'œil, est de suite mis en pleine lumière par la comparaison de la figure précédente avec la suivante, extraites toutes les deux des ouvrages classiques.

La première figure est de Daguin (*fig.* 1639, p. 375, t. IV, 3e édition) dans sa description de la lunette de Galilée, la seconde (*fig.* 2) a été donnée par Verdet (Cours de physique, t. II, p. 210, *fig*, 385) à propos du microscope solaire.

La lentille divergente étant dans les deux cas située entre l'objectif et l'image optique, la *construction devait se trouver la même*, attendu que si les objets sont éloignés dans la lunette de Galilée, le foyer de l'objectif est par compensation relativement long, si l'objectif lumineux est très rapproché dans le microscope solaire la distance focale est par contre très courte, de manière que dans les deux cas la lentille divergente soit en deçà de l'image optique.

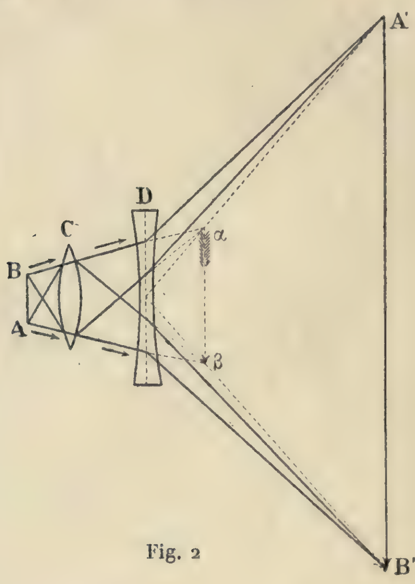


Fig. 2

La dernière construction seule est exacte, car des faisceaux donnant une image *réelle* αβ, peuvent être *déplacés* par un prisme (la lentille biconcave est un double prisme) de manière à transporter en A'B' l'image optique d'une lentille convergente, mais jamais une image *réelle* de projection β d'un point B n'a pu être transformée par un prisme en une image B_1, EN DEÇA du prisme, entre l'oculaire et l'objectif, c'est-à-dire en une image virtuelle comme dans la figure 1.

Les rayons incidents C(1)β, A(2)β viennent se couper en β sous un angle ω (*fig.* 2 bis). Si i_1 et r_1, i'_1 et r'_1 sont les angles d'incidence et de réfraction des deux rayons comptés avec la surface ss', on a $\frac{\cos i_1}{\cos r_1} = n = \frac{\cos i_1}{\cos r'_1}$. Or il est facile de voir que l'on a entre les rayons incidents la relation $i'_1 = i_1 + \omega$, il en résulte que toujours $r'_1 > r_1$. Par conséquent le rayon A(2)β réfracté vient toujours couper le premier rayon C(1)β réfracté en B' comme l'indiquait exactement la figure 2 *et jamais en* B_1 (*fig.* 1) ainsi que l'ont admis tous les auteurs de la théorie de la lunette de Galilée.

En rapprochant encore la première figure de celle (*fig.* 3) que les *rares auteurs* qui ont montré comment les rayons pénétraient dans l'œil ont donnée (Dr S. Czapski. — Théorie des instruments d'optique, p. 250, Breslau, librairie Trewendt, 1893), il devenait visible que la figure classique (1) était basée sur une double erreur :

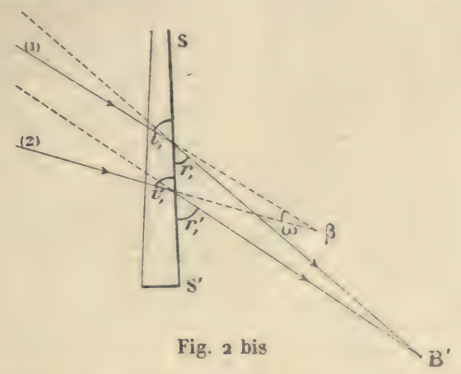


Fig. 2 bis

1° On avait construit l'image *virtuelle* avec des rayons donnant une image réelle A'B' de projection, de photographie;

2° On avait pris pour rayons visuels des rayons qui *ne pénètrent pas dans l'œil* d'après la propre figure du Dr Czapski.

Les auteurs se sont divisés en deux groupes : les uns figuraient l'image virtuelle, mais supprimaient prudemment l'œil, se trouvant dans l'impossibilité d'y faire pénétrer les rayons divergents. Les autres, comme le Dr Czapski, donnaient la marche des rayons visuels mais ne figuraient pas l'image virtuelle (*fig.* 3).

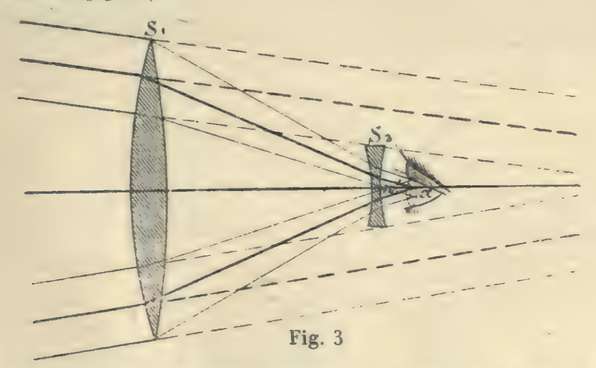


Fig. 3

Nous ne parlons pas des anciens auteurs qui avaient été réduits à prendre un objet de dimensions *micrométriques* pour représenter, en donnant à la pupille une ouverture énorme, à la fois l'image virtuelle et les rayons pénétrant dans l'œil (*fig.* 73, p. 218 de l'ouvrage du Dr S. Czapski).

Comme les objets que l'on vise avec la lunette de Galilée sont des paysages, des monuments, de dimensions *plus grandes* que l'objectif, la marche des rayons qui en viennent et pénètrent dans l'œil est bien celle que donnait la figure du Dr Czapski.

Du reste une expérience très simple montre que l'on ne pouvait pas adopter un autre tracé pour les rayons visuels.

Si l'on place un diaphragme de 1 à 1 et demi millimètre d'ouverture tout contre l'oculaire de la lunette de Galilée et qu'on regarde derrière le diaphragme, à l'intensité lumineuse près fonction de l'ouverture, on observera *avec le même grossissement*, si l'on prend comme point de repère un diaphragme de la lunette.

Donc c'était uniquement avec des rayons *convergents* comme ceux du Dr Czapski pénétrant dans l'œil que l'on devait obtenir l'image de l'objet sur la choroïde.

La figure suivante de Violle plus précise que celle de Daguin et qui est celle enseignée dans tous les lycées et collèges est donc complètement fausse.

Depuis que nous avons fait paraître notre introduction où nous indiquions tous ces faits, le Dr Czapski nous a écrit que dans son ouvrage il n'a *nulle part* cité la figure schématique (*fig.* 4) de Violle *qui est fausse* « for

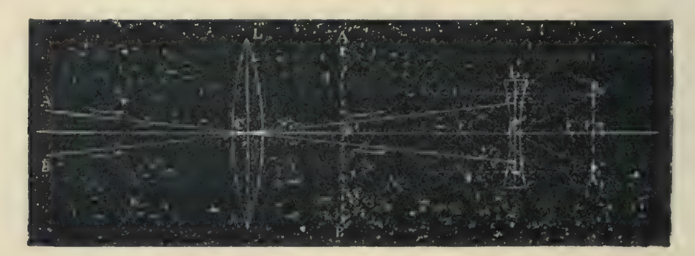


Fig. 4.

Allem aber erwähne ich ausdrücklich nicht die *Figur*, sondern die *Darlegung* Violle's. Die rein schematische, *fig.* 421 (p. 641) bei Violle ist *falsch*, seine Darstellung seiten 643/4 aber halte ich auch heute noch für *richtig* ». Nous avons répondu au Dr Czapski qu'il était regrettable qu'il n'eût pas signalé plus tôt et en particulier dans son ouvrage la fausseté de la figure classique donnée par Violle, fausseté dont il parlait pour la première fois dans la lettre qu'il nous écrivait ; et qu'il était difficile d'admettre qu'avec une figure fausse acceptée actuellement par tout le monde, on ait pu représenter exactement le grossissement des objets éloignés par la formule

$$G = \frac{F}{f},$$

admise par lui *encore* comme exacte « noch *richtig* » ; uniquement sans doute parce qu'il l'a donnée dans son ouvrage, comme tous les auteurs du reste, et qu'il n'a pas la ressource aujourd'hui de la renier comme il renie la figure de l'ouvrage de Violle. Nous verrons que la formule THÉORIQUE du grossissement était complètement inexacte comme la figure classique reconnue *fausse*, après nous, par le Dr Czapski.

Il suffisait du reste de faire remarquer que la formule ci-dessus donnait le grossissement de la lunette astronomique dans laquelle l'oculaire est une *loupe*, et que l'on avait commis une grosse erreur en ne tenant aucun compte des propriétés des lentilles *divergentes* d'après lesquelles les images *virtuelles* sont placées entre le foyer principal F′ et la lentille C′ et non au-delà du foyer principal, en P′ comme dans la figure de Violle. L'*image virtuelle des auteurs ne répondait à aucune image virtuelle des lentilles divergentes.*

Et c'est ce qui explique les variétés de constructions des physiciens. Les anciens plaçaient logiquement l'image virtuelle à la vision distincte des observateurs, qui pour les presbytes se trouvait au-delà de l'objectif.

On voit un exemple de ce tracé dans la figure 73, p. 218 de la « Théorie des instruments d'optique » du Dr S. Czapski.

S. Czapski fait remarquer que la plupart des figures de la lunette de Galilée sont incorrectes surtout parce que l'on n'a pas placé l'image virtuelle entre les deux lentilles. Il donne comme exemple cette figure de son livre, où l'image virtuelle a de ce fait des dimensions quatre fois trop grandes.

P. Mossoti, d'après Czapski, a donné la première figure exacte de la lunette de Galilée (Nuova teoria degli stromenti ottici Pisa 1859, p. 55 et 87). Ont aussi fait paraître certaines discussions sur la lunette de Galilée : N. Lubimoff (Carl's Repert. 8, p. 336 et Pogg. Ann. 148, p. 405, 1873) ; Bredichin et Bohn (Carl's Rep, 9, p. 97, 108, 307) ; Pscheidl (Carl's Rep. 18, p. 686) et Bohn (Exner's Rep., 19. p. 243) ; Czapski (Zeitsch. f. Instrkde 7, p. 409, 1887, 8, p. 102, 1888) ; G. Ferrari (Fundamentaleigenschaften..... p. 419) et Billotti (Theoria.... p. 137).

S. Czapski a passé en revue tous ces mémoires. Aussi lorsqu'il conclut « in Violle's Lehrbuch der physik die fraglichen Verhaltnisse richtig dargelegt gefunden » (p. 251), nous devons donc à notre tour conclure que la formule du grossissement ci-dessus reproduite est la synthèse de toutes les recherches sur la lunette de Galilée.

Les auteurs modernes plaçaient l'image virtuelle entre l'objectif et l'oculaire comme on le voit dans les figures de Daguin et de Violle. Or, si les anciens avaient eu pour eux cette circonstance atténuante d'ignorer le rôle de la lentille divergente dans la vision distincte, rôle analogue à celui

dont nous avons prouvé pour la première fois l'existence dans notre théorie nouvelle de la loupe, s'ils avaient commis l'erreur de croire que l'on visait l'image virtuelle formée, ils étaient au moins logiques avec eux-mêmes en enseignant que l'image virtuelle que l'on a crue jusqu'ici être celle de l'objet se trouvait placée à la vision distincte. Quant aux auteurs modernes, eux, ils laissaient croire que leur image virtuelle était à la vision distincte de l'observateur, mais n'insistaient pas sur ce sujet scabreux. En effet, avec une jumelle de théâtre de 9 centimètres dans son plus grand tirage, un presbyte dont la vision distincte minima est à 40 centimètres, voit très nettement un objet éloigné. L'image virtuelle des auteurs modernes en deçà de l'objectif n'est donc pas à la vision distincte. Alors quelle est cette vision distincte si c'est l'image virtuelle que l'on vise ? Quelle est cette position d'une image virtuelle basée sur une grossière erreur de construction ? Car si le Dr Czapski avoue que la figure de Violle est fausse, il ne dit pas où est l'erreur.

Nous allons de suite le montrer.

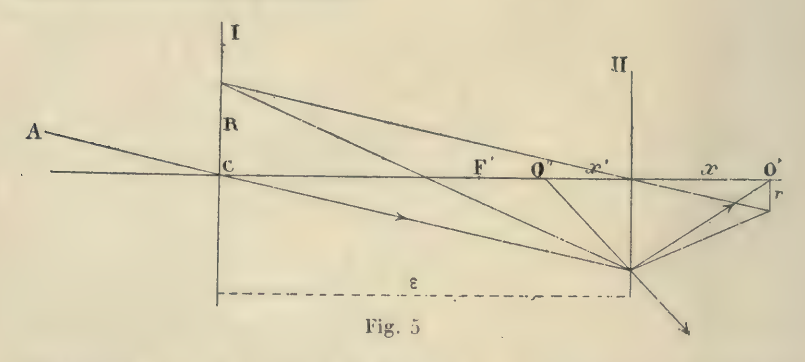


Fig. 5

Les auteurs qui ont construit la figure 4 en représentant un rayon AC, paraissant après réfraction dans la lentille biconcave venir de F'A', ont montré qu'ils avaient complètement oublié comment l'on calcule dans toutes les lunettes la *position de l'anneau oculaire*. Dans la lunette astronomique, en particulier AC est un rayon qui vient de l'infini. Or, ceci n'empêche pas les auteurs d'enseigner avec raison que le rayon qui vient tomber (*fig.* 5) sur la lentille convergente II semble venir *du point C*, centre optique de l'*objectif*, et que l'on a la position x de l'anneau oculaire par la relation

$$\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

ε étant l'*écartement des deux lentilles*, f le foyer principal de II. Supposons que la lentille II soit biconcave, alors c'est *toujours le point C* qui semble

avoir fourni le rayon réfracté, qui, après réfraction paraît venir d'un point O″ donné par la formule des lentilles divergentes

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{f};$$

par conséquent la figure 4 était fausse parce que *jamais les rayons réfractés ne pouvaient être considérés comme venant du foyer principal* F′. Pour que l'on eût $x' = f$ il aurait fallu que $\varepsilon = \infty$, c'est-à-dire que *l'objectif fût à une distance infiniment grande de l'oculaire.* Tel est le genre d'erreurs commises dans la lunette de Galilée ! Et en effet, on ne devait pas oublier les propriétés les plus élémentaires des lentilles divergentes, d'après lesquelles l'image virtuelle d'un point C était située en O″, foyer conjugué de C entre la lentille II et F′ (foyer conjugué de l'infini) et non au-delà de F′, comme la figure 4 l'indique. Pourquoi les auteurs anciens et modernes en sont-ils arrivés à oublier volontairement les propriétés les plus connues des lentilles divergentes ? La raison en est bien simple. En plaçant comme ils savaient qu'ils devaient le faire l'image virtuelle entre un foyer principal de 5 à 6 centimètres et l'oculaire, ils ne pouvaient s'expliquer la vision nette de l'image virtuelle de l'objet qu'ils croyaient viser, quand l'œil était tout contre la lentille divergente, c'est-à-dire à 3 ou 4 centimètres de cette image. Ceci montre bien qu'anciens et modernes étaient persuadés qu'ils se trouvaient en présence de l'image virtuelle de l'objet visé et alors ils avaient une tendance naturelle à placer cette image virtuelle à la vision distincte de l'observateur. Tel est un des points les plus importants que nous avons éclairci aujourd'hui. Nous n'avions pas abordé ce sujet jusqu'ici, ayant réservé pour plus tard la question de la vision nette.

Dans ce qui a paru dans le *Moniteur scientifique* en 1900, nous n'avions examiné que la déviation des rayons qui coïncidaient avec ceux de l'image virtuelle, visée avant l'intercalation de l'objectif. Cela suffisait ayant réservé l'examen de la vision nette, et nous avions montré toutes les erreurs commises même dans ces conditions simplifiées, soit dans la marche des rayons visuels, soit dans le calcul du grossissement et rétabli les propriétés exactes des deux lentilles en montrant que l'objectif seul grossissait les objets, l'oculaire diminuant le grossissement. Il nous restait à expliquer la vision nette quand l'image virtuelle est située entre le foyer principal et l'oculaire, c'est-à-dire à 3 ou 4 centimètres de l'œil. Et c'est alors que nous avons de suite conclu, comme l'auraient fait les auteurs s'ils avaient songé à construire pour l'objectif et le cristallin l'anneau oculaire, que la seule

image virtuelle formée était celle de l'*Objectif*, puisque celui-ci était interposé entre l'objet et la lentille divergente. Quand on est à la vision distincte de l'objet on n'est donc pas à la vision nette de l'image virtuelle de l'objectif la seule qui puisse se former. On ne devait pas oublier lorsque l'on construit l'image virtuelle d'un point que *rien n'est intercalé* entre ce point et la lentille divergente, dans toutes les théories données. On ne pouvait donc avoir que l'image virtuelle des diaphragmes placés *entre l'objectif et l'oculaire et non* celle des objets *au-delà* de l'objectif.

La figure suivante (*fig.* 6) nous a alors donné toute la théorie de la lunette de Galilée. — En regardant à travers l'objectif seul, l'œil placé en K en deçà de l'image optique voyait une fraction h de l'objet H et non l'objet tout entier dont l'image de projection était H', comme on l'enseignait. Cette fraction faisait image dans l'œil en h_1 en avant de la choroïde, vision trouble. En intercalant la lentille divergente l'image h_1 était reportée en h_2 et comme on obtenait la position de h_2 en fonction du tirage ε, il suffisait de donner un tirage tel que h_2 fût exactement sur la choroïde.

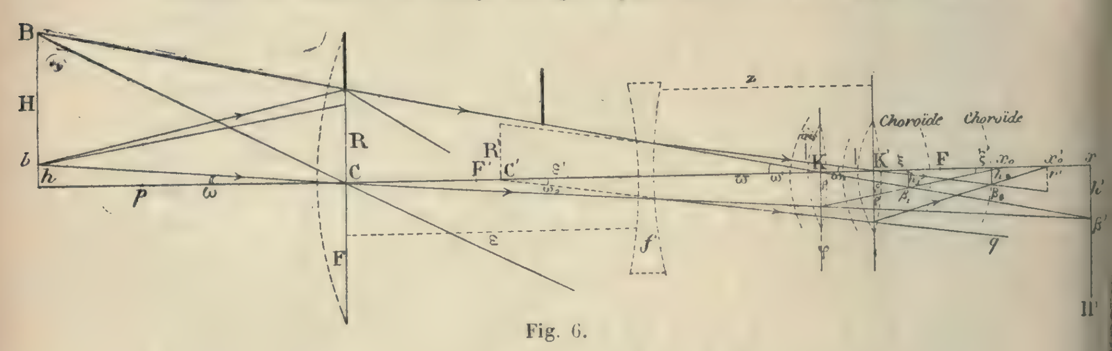


Fig. 6.

L'image β_2 de b sur la choroïde n'était bien entendu formée que par un faisceau très dilué de rayons partis de b, venus de la *partie supérieure de l'objectif* comme dans la figure 3 du Dr Czaspski, et ayant les dimensions de l'ouverture pupillaire, c'est-à-dire que les rayons bC qui ont servi à déterminer la position de β_2 n'entrent pas dans l'œil (le diaphragme iris du reste les arrêterait) et par suite vont former une image photographique, dans la téléphotographie à l'aide de la lunette de Galilée.

La figure actuelle convient au cas où l'observateur K est en deçà de l'image optique de l'objet H, c'est l'observation habituelle dans la lunette de Galilée.

La théorie de la lunette de Galilée devait donc être complètement refaite et l'on peut s'étonner que les milliers de professeurs qui l'enseignent périodiquement ne s'en soient pas aperçu. De tout temps en effet les étudiants

leur faisaient cette objection à laquelle ils ne répondaient pas. Comment donc les rayons *divergents* (*fig.* 4) passant *au-dessous* du centre optique de l'oculaire et venus de l'image virtuelle A′ pénètrent-ils dans l'œil? La figure du Dr S. Czapski montrait que seuls ceux passant *au-dessus* du centre optique de l'oculaire pouvaient aller faire image sur la choroïde, que l'objection était exacte, et que l'ancien tracé des rayons visuels à ce seul point de vue n'avait pas le sens commun. A cette objection on pouvait joindre cette remarque : L'image virtuelle dans les lentilles divergentes est en deçà du foyer principal, pourquoi donc est-elle au delà (*fig.* 4) pour un observateur qui regarde à travers une telle lentille dans la théorie actuelle? Enfin en notant encore la contradiction des figures 1 et 2 qui au point de vue purement géométrique devaient être les mêmes, on peut donc dire que la théorie actuelle de la lunette de Galilée n'a été qu'une accumulation d'erreurs, dues à ce premier fait, l'oubli du tracé des rayons visuels dans l'œil considéré comme une lentille convergente, et à ce second fait : l'ignorance complète du rôle des deux lentilles dans l'interprétation du grossissement et de la vision nette. Mais, et ceci va jeter une profonde stupeur parmi tous ceux qui jusqu'ici ont donné la théorie que nous avons rappelée, le fait primordial qui résulte de notre figure, est que *jamais l'objet visé à travers deux lentilles,* la première *convergente,* la seconde *divergente, n'a fourni d'image virtuelle.* La seule image virtuelle R′ formée est celle de l'OBJECTIF R, C′ image virtuelle de C. De plus les rayons venus de cette image virtuelle (x'_0 foyer conjugué de C′) font toujours leur image r' au-delà de la choroïde quand on est à la vision distincte de l'objet visé; à la vision nette de l'image virtuelle, on n'a qu'une vision trouble de l'objet. Ainsi, *jamais on n'a visé d'image virtuelle,* quand on a voulu voir nettement un objet avec la lunette de Galilée. L'image virtuelle de l'objectif pouvait donc être sans inconvénient bien en deçà de la vision distincte, à quelques centimètres de l'œil pour les oculaires à court foyer comme les propriétés de ces lentilles nous l'indiquaient. Quant au rôle de la lentille divergente sur l'image de projection h_1 dans le système convergent objectif-cristallin, (*fig.* 6) il fut exactement le même que celui que les auteurs ont décrit dans le microscope solaire et représenté par la figure 2. De même qu'en intercalant ici la lentille divergente D entre l'objectif et l'image de projection $\alpha\beta$ on a reporté celle-ci en A′B′ sur un écran ; de même (*fig.* 6) la lentille divergente intercalée entre l'objectif et l'image de projection h_1 a reporté cette image en h_2 sur la choroïde jouant le rôle d'écran. Les droites menées par les extrémités de h_2 et le point nodal K′ étant des lignes de direction de la vision, l'angle ω_1, qui sous-tend l'image virtuelle de l'*objectif* est donc l'angle visuel

après réfraction à travers l'ensemble des deux lentilles, et comme l'angle visuel avant réfraction si l'objet est éloigné est ω, le grossissement sera défini comme dans la lunette astronomique par le rapport de ces deux angles ou plutôt de leur tangentes.

En même temps nous pouvons formuler cette loi qui donne toute la théorie de la vision à travers les lentilles et qui, si elle avait été connue, aurait empêché les auteurs de commettre la série d'erreurs que nous avons relevées dans la lunette de Galilée. Cette loi est la suivante. Quels que soient le nombre et la nature des lentilles interposées entre un objet et l'œil qui vise cet objet à travers celles-ci, la *première* lentille tournée vers l'*objet* déterminera *seule* la nature de l'image. C'est ainsi que dans le microscope solaire, dans la lunette de Galilée, la lentille convergente étant tournée vers l'objet, on a toujours eu une image réelle de projection, parce que la lentille divergente dévie les rayons, mais ne modifie pas la nature de l'image qui, réelle, reste réelle.

Lorsque de même on regarde avec une jumelle par le gros bout, la lentille divergente étant tournée vers l'objet, c'est toujours une image virtuelle, du même côté que l'objet, qui se forme et que l'on vise même quand on intercale une lentille convergente entre l'objectif et l'œil. Il en résulte donc que dans la lunette de Galilée on ne *visait jamais d'image virtuelle de l'objet* (qui ne pouvait exister) et que toute l'ancienne théorie basée sur cette hypothèse de la vision d'une image virtuelle devait être rejetée *à priori*.

La véritable théorie de la lunette de Galilée que nous allons développer sera représentée par l'ensemble des figures 2, 3 et 6. La théorie classique actuelle avec les grossières erreurs que nous avons relevées est représentée par les figures 1 et 4.

I. — De la vision à travers les lentilles

Avant d'aborder notre théorie nouvelle de la lunette de Galilée, il convient de continuer l'énumération de la suite des erreurs enseignées, même en ne tenant pas compte de la réfraction de l'œil, c'est-à-dire en représentant l'œil par un point suivi de la lettre O, comme l'ont fait tous les auteurs.

Conformément aux figures de Daguin et de Violle, on disait :

L'œil voit l'image de projection $\alpha\beta$ que donne la première lentille et, grâce à la seconde lentille divergente mise devant l'œil, cette image de projection $\alpha\beta$ est vue à la vision distincte A_1B_1, considérablement agrandie. C'était simple, facile à calculer et complètement faux comme l'expérience la plus primitive permettait de le vérifier.

En premier lieu A_1B_1 n'est nullement à la vision distincte quand c'est un presbyte qui regarde, comme on le vérifie avec une jumelle de théâtre. Et comme nous l'avons rappelé d'après le Dr Czapski, les anciens auteurs qui plaçaient A_1B_1 à la vision distincte, c'est-à-dire au-delà de l'objectif, avaient obtenu des grossissements 4 fois trop grands.

En second lieu il est facile de vérifier que ce que l'on voit n'est nullement l'*image de projection amplifiée*.

Prenons une jumelle de théâtre mise au point, puis dévissons l'oculaire, et l'objectif tourné vers une fenêtre, déterminons-en l'image optique. Il suffit de mettre un papier transparent au foyer conjugé de la fenêtre et en se plaçant à la vision distincte du papier l'image optique très nette est vue par transparence. Le diaphragme, qui est dans la lunette, limite l'image optique de la fenêtre à deux carreaux et demi. Cela posé, revissons l'oculaire et visons la fenêtre. Bien que l'œil soit *beaucoup plus près du diaphragme* que l'image optique, on ne perçoit plus qu'UN *carreau*. Donc cette expérience, que tout le monde peut répéter, prouve l'inexactitude de l'hypothèse primitive des auteurs. L'image de projection fournie par la première lentille n'était pas celle que l'on voyait, comme on l'enseignait.

Pour le calcul du grossissement on supposait l'œil au centre optique de la lentille divergente. Or, les rayons qui vont donner une image réelle sur le fond de l'œil passent par le point nodal de celui-ci qui se trouve au moins à 2 centimètres de l'oculaire en tenant compte de l'épaisseur de la cornée transparente, des paupières, etc., et de ce fait que le 1er foyer principal de l'œil est à $12^{mm},8$ de la cornée transparente.

C'est-à-dire que pratiquement on ne pouvait supprimer les propriétés des lentilles divergentes, ce que l'on faisait en réalité en plaçant le point nodal au centre optique de l'oculaire.

Mais il y a plus, on enseignait dans la théorie actuelle que l'œil était nécessairement en deçà de l'image optique comme la lentille divergente.

Or, la seconde objection à la théorie actuelle est la suivante, l'œil peut être écarté autant qu'on voudra de l'oculaire dans la lunette de Galilée. Si emmétrope on fait des efforts d'accommodation suffisants ou, si myope on regarde avec le binocle dont le numéro convient à la distance de l'objet à laquelle on est placé on peut avec une jumelle de théâtre écarter l'œil de l'oculaire de 20 *centimètres* et voir *très nettement.*

Le grossissement va en diminuant dans ces conditions, mais non pas aussi rapidement que lorsque l'on s'écarte d'une lentille biconcave.

Donc l'hypothèse des auteurs qui supposaient que l'œil devait être placé nécessairement tout contre l'oculaire, c'est-à-dire *en deça* de l'image optique, était fausse.

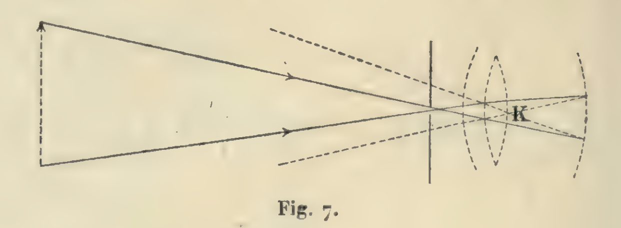


Fig. 7.

Une théorie rationnelle et générale de la lunette de Galilée devait donc placer l'œil à une distance variable de l'oculaire. On devait en outre ne pas perdre de vue les notions les plus élémentaires concernant la vision des *objets*. Nous allons les rappeler, car nous les invoquerons dans la nouvelle théorie que nous donnerons.

La vision des *objets* peut s'obtenir de deux façons : soit en regardant à travers un petit diaphragme placé devant la cornée transparente, *ce qui revient à supprimer le cristallin,* soit en n'ayant comme diaphragme que l'iris, ce qui permet au cristallin de jouer son rôle de lentille convergente.

Dans le premier cas (fig. 7) l'œil est une véritable chambre noire.

Il n'existe aucun cercle de diffusion, c'est *point* par *point* que l'impression lumineuse se fait sur le fond de l'œil, *quelle que soit la distance de l'objet, quelle que soit la vue de l'observateur,* presbyte, myope, hypermétrope, *on verra egalement bien,* à l'intensité lumineuse près, bien entendu, puisque celle-ci est toujours fonction de l'ouverture du diaphragme. C'est la vision sans accommodation. Nous insistons sur cette vision à travers une petite ouverture parce que nous avons rencontré un ophtalmologiste des plus distingué, devenu presbyte par l'âge, et qui au bout de trente ans

d'exercice, fut très étonné de pouvoir lire à quelques centimètres en remplaçant ses besicles par un petit diaphragme mis devant l'œil. Si l'ouverture est trop petite pour que les rayons incidents ne puissent être considérés comme passant par le point nodal K, alors l'objet paraît grossi (*fig.* 7), c'est-à-dire que l'angle visuel paraît plus grand que dans la figure ci-dessous.

Dans le second cas qui constitue la vision habituelle, il y a formation d'une image optique, grâce au cristallin jouant le rôle de lentille convergente et suivant la position de cette image, par rapport au fond de l'œil, on a les variétés connues de presbyte, myope, etc. (*fig.* 8).

Quelle que soit la manière dont le fond de l'œil sera impressionné, soit par point comme dans le premier cas, soit par une véritable image optique comme ci-dessous, pour avoir la *notion d'un* OBJET *il faudra toujours figurer* des rayons *convergents* partis des extrémités de cet objet et *représentés par les flèches passant par le centre nodal de l'œil dans la vision avec accomodation*. Or, cette seule remarque condamnait les figures 1 et 4 des auteurs.

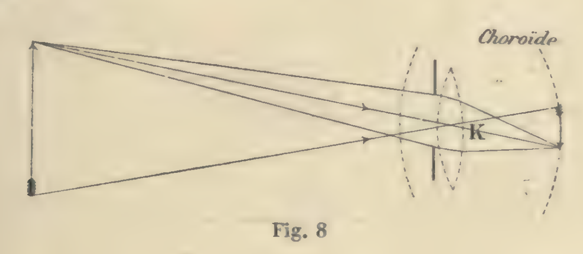


Fig. 8

La grosse erreur commise, en outre, dans la théorie de la lunette de Galilée, représentée par les figures 1 et 4, a été de ne pas attribuer aux deux lentilles plan-convexe et biconcave le rôle qu'elles remplissent séparément par rapport à l'œil.

Seul le Dr Czapski, par sa figure 3, nous permet de nous rendre compte du rôle joué par la première lentille qui est de voir les objets sous un angle *plus grand*, puis par le trajet des rayons à travers la seconde lentille sous un angle *plus petit*; mais il semble qu'après avoir été si près de la vérité il ait reculé à conclure. La conclusion, puisqu'il invoquait la propriété des lentilles divergentes qui permettent de voir les objets sous un angle *plus petit*, était d'aller jusqu'au bout et de tracer l'image virtuelle que fournissait *cette lentille* placée devant l'œil, comme nous le faisons par la figure suivante, avec un œil susceptible de grands efforts d'accommodation

Mais cette image virtuelle immédiatement placée sous l'œil et qui étai celle de l'objectif, rentrait si peu dans la théorie enseignée, que le D Czapski semble avoir reculé à la tracer et que tout ce qu'il put faire dans

son Traité où il donne la figure 3, *qui est la base même de notre théorie nouvelle de la lunette de Galilée*, fut de ne pas reproduire la figure classique donnée par Violle, sans avoir osé cependant proclamer qu'elle était fausse, comme il l'a fait depuis l'apparition de notre introduction.

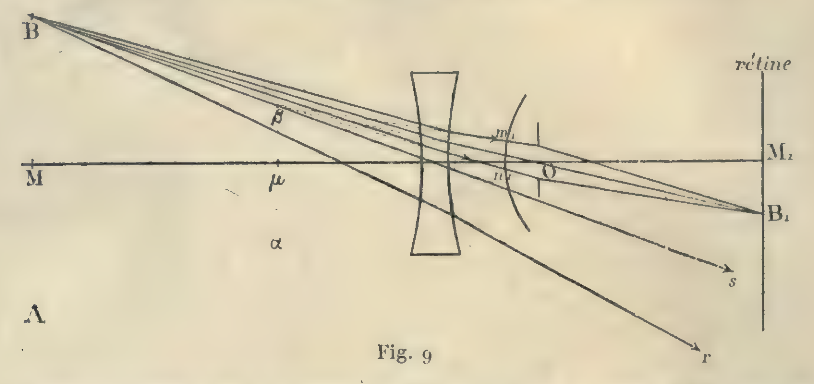


Fig. 9

Lorsque comme dans la figure du Dr Czapski, des rayons S_1O' qui devaient aller converger en O', sont après leur passage à travers l'objectif dirigés vers K, où se trouve l'œil de l'observateur regardant à travers un diaphragme E, il y a *grossissement* de l'objet éloigné qui au lieu d'être vu sous l'angle S_2KM est vu sous l'angle S_1KM.

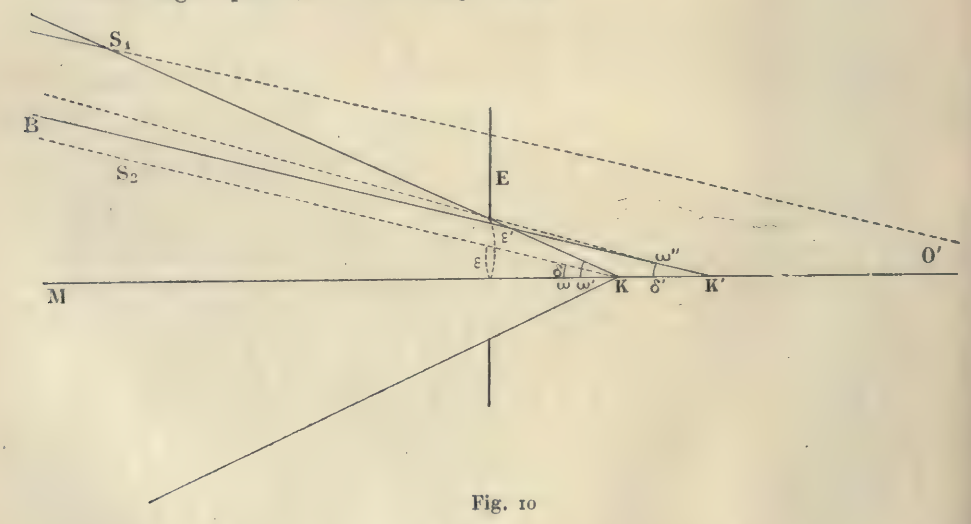


Fig. 10

Le grossissement est le rapport $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$. Or $\varepsilon' = \delta \text{ tang } \omega'$, $\varepsilon = \delta \text{ tang } \omega$. Donc on a

$$G = \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega}$$

et ce grossissement est *indépendant de la vision distincte,* la vision pouvant être trouble et elle l'est comme nous allons l'expliquer, ce qui n'empêche pas de constater le grossissement. Que par suite de l'interposition d'une lentille divergente l'œil soit obligé de se placer en K', le grossissement deviendra

$$G' = \frac{\text{tang } \omega''}{\text{tang } \omega}$$

et ce grossissement sera *moindre* que s'il n'y avait pas eu de lentille divergente. Ceci est conforme aux propriétés de ces lentilles. Si δ est lié à δ par les formules ordinaires des lentilles divergentes, on voit comment l'on calculera le grossissement pour une position *arbitraire* de l'observateur, c'est-à-dire sans s'inquiéter tout d'abord de savoir si la vision sera nette.

Dans ce calcul du grossissement conforme à la figure du Dr Czapski, les choses se passent comme si l'objet que l'on voit, était toujours en BM, les lentilles n'ayant produit que des déviations des rayons incidents. Le problème n'était donc pas résolu.

Il restait à faire voir comme nous le montre notre figure 9, si l'objet AB était ramené en $\alpha\beta$, *sous l'œil* de l'observateur, à la distance que l'on obtient par la propriété des lentilles divergentes, quand un objectif convergent est intercalé entre l'objet et la lentille biconcave.

L'image virtuelle $\alpha\beta$ de la lentille divergente très forte dans la lunette de Galilée n'étant jamais à la vision distincte de l'œil, la seule dont on n'avait jamais parlé, des observateurs placés tout contre l'oculaire, il faudra, pour terminer, trouver l'explication de ce fait d'une vision nette qui n'a jamais été tentée. Car comme nous l'avons indiqué, dans les constructions de Daguin et de Violle, leur image virtuelle n'était pas à la vision distincte habituelle d'un presbyte qui cependant voyait nettement. Et elle l'est encore moins dans notre construction. Tout s'expliquait comme nous l'avons vu dans notre introduction en montrant qu'il ne se formait pas d'image virtuelle de l'objet visé.

En résumé on voit que cette théorie de la lunette de Galilée ne ressemble en quoi que ce soit à celle donnée jusqu'ici.

On fait intervenir les propriétés bien connues des lentilles convergentes et divergentes pour un observateur qui regarde à travers ces lentilles. Alors que dans l'ancienne théorie l'objectif était purement et simplement une lentille de projection, dans notre théorie tout en formant une image optique elle remplit par rapport à l'œil placé sur le trajet des rayons allant former cette image, le rôle d'un verre grossissant. L'oculaire *tout en diminuant le grossissement de la première lentille* par déviation des rayons, ne donne

jamais une image virtuelle de l'objet qui est vu comme dans la figure 3 du Dr Czapski.

Dans l'ancienne théorie on avait fait jouer à l'oculaire (lentille divergente), le rôle d'une loupe ! et la position de l'image virtuelle restait indéterminée, les anciens l'ayant placée à la vision distincte à l'œil nu, les modernes entre l'oculaire et l'objectif, c'est-à-dire à une distance qui n'était ni celle de la vision distincte à l'œil nu, ni celle qui convenait aux images virtuelles des lentilles divergentes.

Dans la figure du Dr Czapski l'objectif joue le rôle de verre grossissant, puisque les objets sont vus sous un angle plus grand. Il s'agit de nous rendre compte de la vision dans ces conditions et de calculer le grossissement que l'on obtiendrait. Donnons d'abord la théorie de la vision à travers une lentille convergente, *sans nous occuper de la netteté*, et en négligeant d'abord la réfraction de l'œil.

Lentilles convergentes.

La vision d'un *point* lumineux se déterminera en prenant pour base l'ouverture pupillaire et pour sommet ce point. Il y aura une distinction fondamentale entre une image de vision et une image de projection à travers une lentille, comme le montre la figure ci-contre (*fig.* 11).

L'image de *projection* d'un point B sera formée en β par l'*ensemble de tous les rayons divergents* que la lentille entière peut faire converger. L'image β' de *vision* (en négligeant ici la légère réfraction de l'œil) ne sera formée que par un *très mince faisceau* de rayons divergents, faisceau d'autant plus mince que la pupille sera plus contractée. Si bien qu'aucun des rayons Bm, BC, Bn ne peut intervenir pour donner la vision d'un point B.

Si celui-ci est très éloigné et la pupille suffisamment contractée, on voit que le cône B$m'n'$ peut être représenté par une droite, étant bien entendu que l'œil pour voir se trouve placé après réfraction sur le rayon qui peut passer et par le trou pupillaire et par l'image optique du point B. On voit que l'on tient compte ainsi de la divergence des rayons formant le cône très dilué B$m'n'$. Comme la figure le montre on peut déjà formuler cette loi qui est la condamnation de la figure 1 des auteurs :

Lorsque l'œil est situé entre une lentille convergente et l'image optique d'un objet les points situés *au-dessus* de l'axe principal ne sont vus que par des faisceaux dilués situés *au-dessus* du centre optique de la lentille. On a donc une image rétinienne de l'objet droite, agrandie et confuse $\beta O \mu > \beta'' O \mu' = \text{BOM}$. On peut diminuer considérablement les cercles de

de diffusion en β′ si l'on a soin de diminuer l'ouverture pupillaire, ou de regarder à travers un petit diaphragme placé contre l'œil et alors on voit très nettement. C'est la vision nette, sans accommodation.

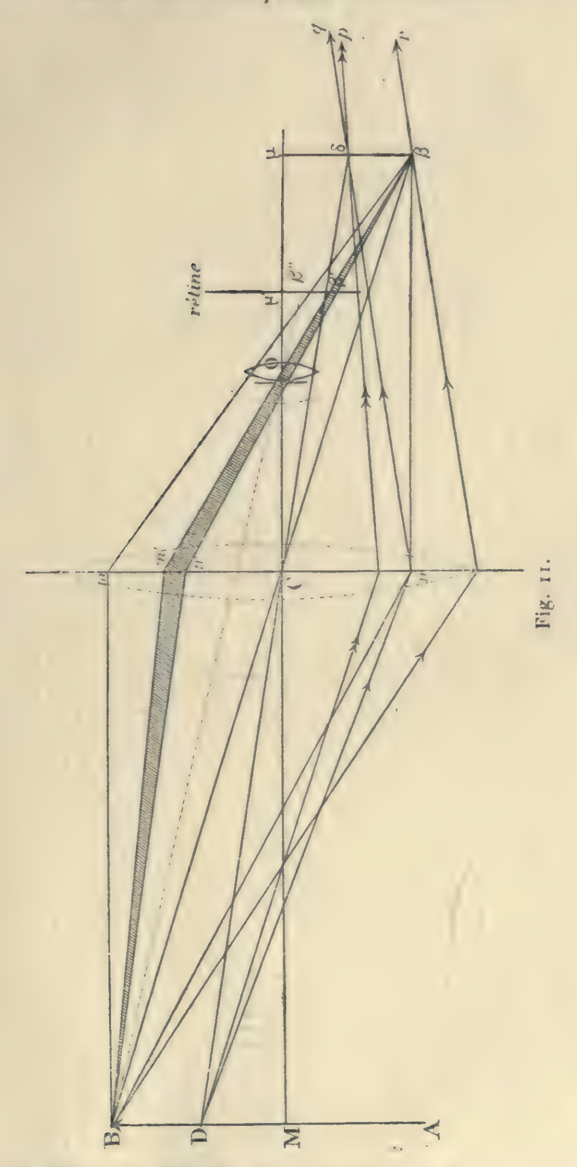


Fig. 11.

Si l'œil est placé au delà de l'image optique, il ne sera impressionné pour les points au-dessus de l'axe principal que par les faisceaux passant *au-dessous* du centre optique. Les images seront donc vues renversées.

Si l'œil est sur l'axe et que les rayons dans la direction de r (*fig.* 11) puissent passer par le trou pupillaire, alors on verra l'image optique totale. Mais

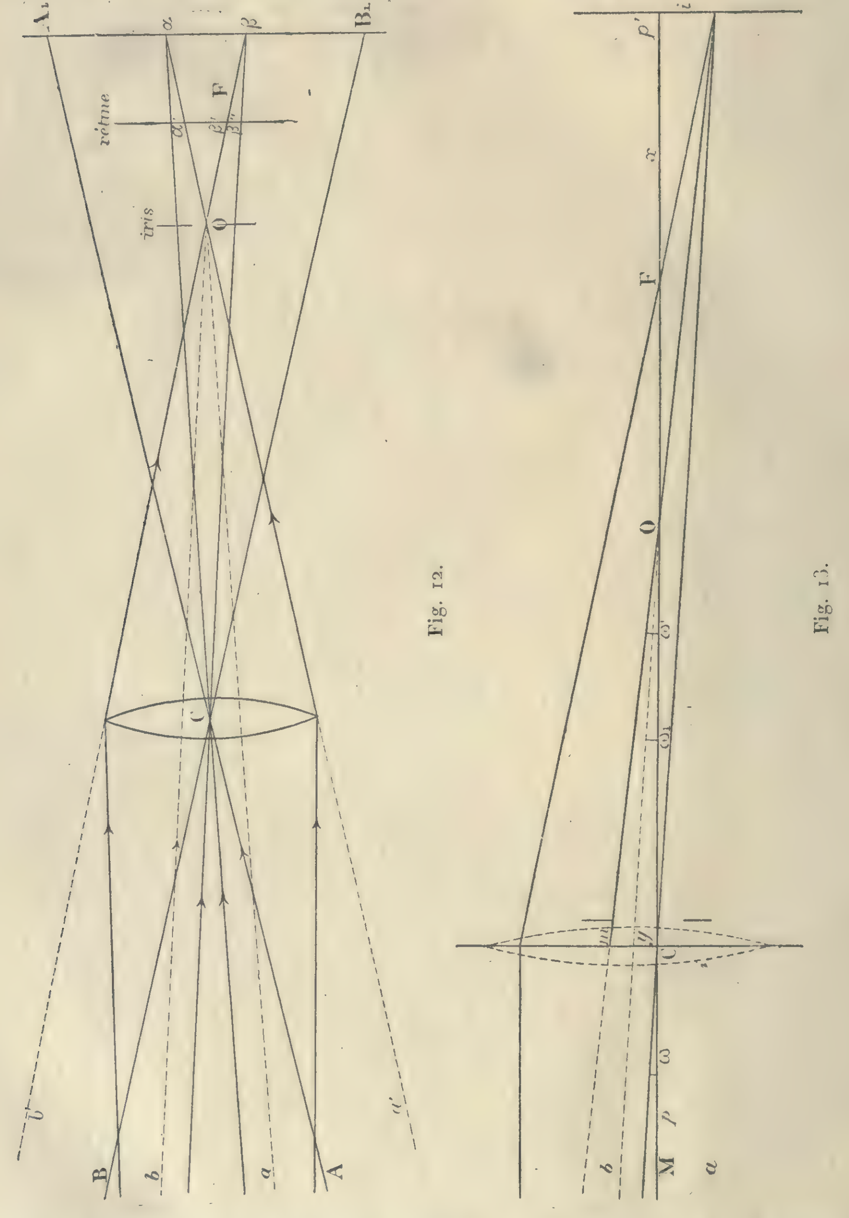


Fig. 12.

Fig. 13.

dans la direction de p ou q on ne verrait qu'une *fraction* $\mu\delta$ de l'image optique, fraction qui peut être très petite.

Il est donc inexact d'enseigner qu'en se plaçant à la vision distincte de l'image optique on doit nécessairement voir celle-ci entièrement.

C'est ainsi que dans l'examen du fond de l'œil, Helmholtz après avoir enseigné qu'en se plaçant à la vision distincte de l'image que fournit le cristallin, on pouvait voir sans lentille le fond de l'œil très agrandi, est bien obligé d'avouer que, finalement, on ne voit rien du tout.

S'il avait su, comme nous le montrons pour la première fois, qu'on ne voyait qu'une fraction très petite de l'objet visé, il n'aurait pas été étonné que quand l'objet était déjà très petit, on ne voyait plus qu'un point en se plaçant à la vision distincte de l'image optique agrandie du fond de l'œil.

Sans nous inquiéter du fait que la vision sera trouble quand l'œil sera en avant de l'image de projection calculons le grossissement et la fraction de l'image de projection que l'on verra puisque nous avons vérifié que l'on ne voyait qu'une fraction de l'image optique.

Si A_1B_1 est l'image optique de l'objet AB (*fig.* 12), l'œil placé en O sur le trajet des rayons venus de la fraction *ab* de l'objet et dont l'image optique est en $\alpha\beta$ ne peut recevoir, comme on s'en rend compte, qu'une fraction des rayons venus de l'objet, puisque les rayons AC, BC, ne pourraient pénétrer dans l'œil. Le diamètre apparent sans objectif de la fraction vue étant *ab*, on remarque que l'interposition de la lentille permettra de voir cette fraction sous l'angle $\alpha' O \beta' = b' O a' > a O b$. La vision est trouble, sans diaphragme, parce que la rétine étant en avant de l'image optique le faisceau lumineux venu de *b* s'étale en $\beta'\beta''$ par exemple.

Le grossissement dû à la première lentille, donnant son image optique en p' (*fig.* 13) à une distance x du foyer principal F conformément à la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{F + x} = \frac{1}{F},$$

se calculera facilement pour les différentes positions de l'œil O placé à une distance z de cette lentille.

La moitié de la partie que l'on voit qui, avant l'interposition de la lentille, aurait été vue sous l'angle ω_1, le sera après sous l'angle $mOC = \omega'$.

Le grossissement sera le rapport des deux diamètres apparents vus sous les angles $2\omega'$ et 2ω en négligeant la distance z par rapport à p.

On aura par suite comme première approximation

$$(F + x) \operatorname{tang} \omega = (F + x - z) \operatorname{tang} \omega',$$

d'où pour le grossissement

$$\frac{\operatorname{tang} \omega'}{\operatorname{tang} \omega} = \frac{F + x}{F + x - z}.$$

Si l'on ne voulait pas négliger z par rapport à p le véritable grossissement G aurait été $\frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega_1}$ et comme $(p + z) \text{ tang } \omega_1 = p \text{ tang } \omega$, on aurait eu

$$(3) \qquad G = \frac{F + x}{F + x - z}\left(1 + \frac{z}{p}\right).$$

Cette formule nous montre donc, ce que l'on vérifie facilement et ce que tout le monde sait, que l'œil placé tout contre, $z = 0$, une lentille plan convexe, voit les objets comme si la lentille n'existait pas, l'œil ne recevant alors que les rayons passant par le centre optique. Que le grossissement a lieu au fur et à mesure que l'œil s'écarte de la lentille, les objets étant vus *droits* et *agrandis*, et que pour $z = F + x$, le grossissement devient infini. La vision est trouble comme nous l'avons expliqué (*fig.* 11) dans ces expériences, mais elle aurait été très nette si l'œil avait été armé d'un œilleton qui aurait supprimé les cercles de diffusion. La lentille ne joue pas le rôle de loupe quoique grossissant les objets parce que p est plus grand que la distance focale principale de la lentille. Il est extraordinaire que dans les traités d'Optique on ne se soit jamais arrêté à ce grossissement des lentilles convergentes qui doit jouer un si grand rôle, comme nous allons le voir, dans le grossissement de la lunette de Galilée.

Reste un point très important à étudier et qui montrera bien le rôle de la première lentille dans cette lunette. La détermination de la *fraction* de l'objet que l'on verra grossie.

L'expérience est très nette, l'œil collé tout contre la lentille voit l'objet AB = J, tout entier et non agrandi. Au fur et à mesure qu'il s'écarte du centre optique de la lentille, le grossissement s'observe, en même temps que l'on voit diminuer la fraction visible. Cette fraction j est limitée par le diaphragme qué forme l'anneau de la lentille. Si l'on en nomme y la demi-ouverture on aura (*fig.* 13) :

$$y = z \text{ tang } \omega' \quad j = 2(p + z) \text{ tang } \omega_1 \quad \text{d'où} \quad j = y\,\frac{2(p + z)}{z}\,\frac{\text{tang } \omega_1}{\text{tang } \omega'}.$$

Le grossissement étant comme nous l'avons vu

$$G = \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega_1} = \frac{F + x}{F + x - z}\left(1 + \frac{z}{p}\right),$$

il viendra

$$j = y\,\frac{2p}{z}\,\frac{F + x - z}{F + x}.$$

D'un autre côté l'œil étant toujours à la même distance z de la lentille, le même diaphragme, sans lentille, aurait limité le champ visuel à ab : savoir

$$J = \frac{2y}{z}(z + p),$$

on aurait donc eu

$$j = J\,\frac{p}{z+p}\,\frac{F + x - z}{F + x}.$$

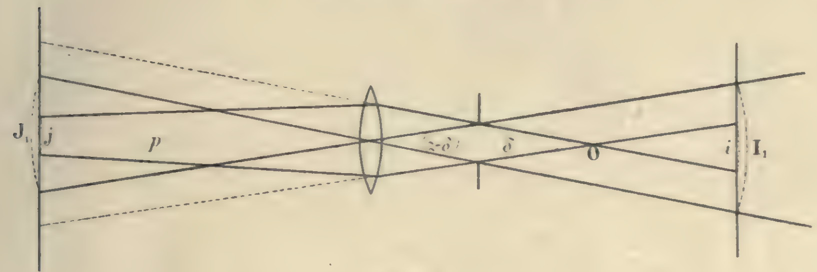


Fig. 14.

Si le diaphragme est à une certaine distance de la lentille et de moindre dimension que son ouverture comme dans les lunettes, en nommant δ la distance de l'œil à ce diaphragme, on aurait pour la dimension de l'objet vu sans lentille (*fig.* 14).

$$J = \frac{2y}{\delta}(z + p),$$

et avec la lentille

$$j = \frac{2yp}{\delta}\,\frac{F + x - z}{F + x},$$

Pour $z = F + x$, on aurait

$$J = \frac{y}{\delta}(F + x + p) \qquad \text{et} \qquad j = \text{zéro}.$$

Si l'on nomme J_1 la fraction de la dimension d'un objet de grandeur indéfinie placé devant l'objectif et susceptible de donner une image optique limitée par le diaphragme d'ouverture $2y$ à une distance $z - \delta$ de la lentille, on aura

$$\frac{z-\delta}{2y} = \frac{p}{J_1} \qquad \text{d'où} \qquad J_1 = \frac{2yp}{z-\delta} \qquad \text{et} \qquad I_1 = \frac{p'}{p}J_1 = \frac{2yp'}{z-\delta},$$

Au contraire l'œil placé en O aurait vu sans lentille une partie du champ visuel

$$J = \frac{2y}{\delta}(z + p),$$

et avec la lentille

$$j = \frac{2yp}{\delta} \frac{F + x - z}{F + x} \quad \text{et} \quad i = \frac{p' - z}{\delta} 2y = \frac{2yp'}{\delta} \frac{F + x - z}{F + x}.$$

Il en résulte donc que la relation qui existe entre la grandeur de l'image de projection I_1 et celle de l'image de vision i n'est nullement l'égalité, mais que l'on a

$$(4) \qquad i = I_1 \frac{z - \delta}{\delta} \frac{F + x - z}{F + x},$$

et que la fraction de l'image optique qui pénètre dans l'œil est d'autant plus petite qu'on se rapproche davantage de cette image. Il était donc inexact d'enseigner, comme les auteurs le supposaient dans leur figure 1, que celle-ci pouvait être celle que l'on verrait. La relation (4) nous permet de comprendre l'expérience que nous avons citée (page 15) pour prouver l'inexactitude de l'hypothèse primordiale des auteurs. On déterminerait de même la grandeur de l'image de vision quand l'œil est au delà de l'image optique.

Lentilles divergentes

Après avoir étudié la vision à travers une lentille convergente quand l'œil est en deçà de l'image optique, étudions de même les lentilles biconcaves.

Plaçons donc devant l'œil une lentille biconcave ; celle-ci ne saurait jouer d'autre rôle, avoir d'autres propriétés que celle bien connue des myopes et que rappelait la figure 3 du Dr S. Czapski. Or, il est incroyable que dans la théorie actuelle de la lunette de Galilée on ait attribué à cette lentille pour des images virtuelles le même rôle qu'elle possède dans le microscope solaire où elle sert à agrandir davantage des images de *projection*.

Le rôle de la lentille convave qui intervient dans la lunette de Galilée sera nettement déterminé si nous montrons comment un œil de myope ou de presbyte placé devant une telle lentille voit l'objectif.

Pour les lentilles convexes, nous avons déjà indiqué qu'un œil quel-

conque placé entre la lentille et l'image optique ne voit à travers un diaphragme qu'une *fraction* de l'objet qu'il verrait à travers le même diaphragme sans lentille, précisément parce qu'elle grossit.

Pour les lentilles concaves, nous allons montrer que c'est le contraire, et qu'à travers un diaphragme E, l'œil armé d'une lentille concave a un champ visuel plus étendu que sans lentille parce que ces dernières rapetissant toujours les objets, permettent d'en voir plus dans le même champ visuel limité par le diaphragme. La conséquence de cette remarque sera une nouvelle preuve de l'erreur commise dans la théorie actuelle de la lunette de Galilée. On admettait en effet que la lentille concave grossissait l'image optique de projection, ce qui, naturellement, devrait amener l'observateur regardant derrière cette lentille, à voir moins d'objets dans le même champ visuel, ce qui est *exactement le contraire*.

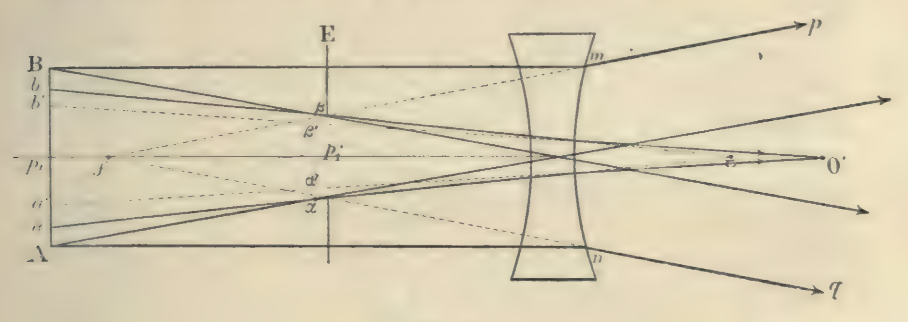


Fig. 15

La figure 15 montre de suite la propriété des lentilles concaves pour les rayons visuels. Si ab est un objet dont les rayons convergents viendraient aboutir en ϖ, et après réfraction en O′, ϖ et O′ étant liés par la relation connue des faisceaux convergents sur une lentille concave

$$\frac{1}{\varpi} - \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}.$$

Si les rayons convergents ont été pris tels que réfractés, ils peuvent être en même temps tangents aux bords du diaphragme E, nous allons montrer que $\alpha'\beta'$ situé à une distance p'_1 lié à p_1 par la relation

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f}.$$

sera l'image virtuelle de ab.

Pour cela, prolongeons α', β', jusqu'à α et β sur les droites $a\varpi$, $b\varpi$. Des points α, β, nous traçons les droites $f\alpha m$, $f\beta n$ de manière à retrouver l'objet AB qui aurait donné cette image virtuelle α, β.

Cela posé, nous allons montrer que $\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} = \frac{ab}{\text{AB}}$, par conséquent que α' est l'image virtuelle de a et β' de b.

Autrement dit qu'en menant de a et b des droites parallèles à l'axe, en joignant f aux point d'émergence les droites passeraient par α' β'.

Il est facile de voir que l'on a, la lentille étant très mince :

$$\frac{\text{AB}}{\alpha\beta} = \frac{p_1}{p'_1}, \qquad \frac{\varpi + p'_1}{\alpha\beta} = \frac{\varpi + p_1}{ab},$$

d'où

$$ab = \text{AB}\,\frac{p'}{p}\,\frac{\varpi + p_1}{\varpi + p'_1}.$$

On a encore, en nommant $2y$ l'ouverture sur la lentille correspondant à celle du diaphragme placé en E à la vision distincte où s'observe l'image virtuelle,

$$\frac{\varpi}{2y} = \frac{\varpi + p'_1}{\alpha\beta}, \qquad \frac{z'}{2y} = \frac{z' + p'_1}{\alpha'\beta'},$$

d'où

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta\,\frac{\varpi}{z'}\,\frac{z' + p'_1}{\varpi + p'_1}.$$

Or,

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{f - p'_1}{f} \qquad \text{d'où} \qquad p' = p'_1\,\frac{f}{f - p'_1},$$

$$\varpi = z'\,\frac{f}{z' + f} \qquad \text{d'où} \qquad p_1 + \varpi = \frac{z' + p'_1}{z' + f}\,\frac{f^2}{f - p'_1};$$

Par suite

$$ab = \text{AB}\,\frac{f}{\varpi + p'_1}\cdot\frac{z' + p'_1}{z' + f};$$

d'un autre côté $\frac{\varpi}{z'} = \frac{f}{z' + f}$,

d'où

$$\alpha'\beta' = \alpha\beta\,\frac{f}{z' + f}\,\frac{z' + p'_1}{\varpi + p'_1},$$

on a donc

$$\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} = \frac{ab}{\text{AB}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\alpha'\beta'}{ab} = \frac{\alpha\beta}{\text{AB}} = \frac{p'_1}{p_1}.$$

Ainsi $\alpha'\beta'$ est bien l'image virtuelle que l'œil fixe suivant les droites $'z'$, $\beta'z'$ de l'objet ab, droites tangentes aux bords du diaphragme. Si l'on

supprime la lentille, l'objet visé est donc $a'b' < ab$. Donc la lentille concave augmente le champ visuel. On peut le vérifier facilement. Nous avons ici une expérience inverse de celle que l'on avait faite en intercalant en avant du diaphragme une lentille convergente, avec cette seule différence que la position de l'œil est quelconque.

Il est facile de calculer le rapport $\frac{a'b'}{ab}$ entre les deux champs visuels. En effet

$$a'b' = \alpha'\beta' \frac{z' + p_1}{z' + p_1'},$$

et en mettant pour $\alpha'\beta'$ sa valeur,

$$a'b' = ab \frac{p_1'}{p_1} \frac{z' + p_1}{z' + p_1'}.$$

Or, $a'b'$ étant vu sous le même angle que $\alpha'\beta'$, image virtuelle de ab, il en résulte que l'action de la lentille concave est de rétrécir la longueur ab dans l'espace $a'b'$. Si par exemple ab était une longueur de 50 centimètres, $a'b'$ de 25 centimètres, on en conclurait que l'action de la lentille a été de diminuer de moitié la grandeur apparente des objets. La diminution D de grandeur apparente sera donc donnée par la formule

$$D = \frac{a'b'}{ab} = \frac{p_1'}{p_1} \frac{z' + p_1}{z' + p_1'},$$

avec la relation, si l'on s'était placé à la vision distincte Δ,

$$z' + p_1' = \Delta.$$

Quand p est suffisamment éloigné pour que z' soit négligeable par rapport à p_1 la formule ci-dessus devient, x étant la distance de l'image optique à f:

(5) $$D = \frac{p_1'}{z' + p_1'} = \frac{f - x'}{z' + f - x'} = \frac{f - x'}{\Delta}.$$

Enfin, si p_1 est très éloigné par suite x' sensiblement nul, on a

$$D = \frac{f}{z' + f} = \frac{f}{\Delta}.$$

On voit donc qu'un myope (Δ_m) et un presbyte (Δ_p) apprécieront d'une manière totalement différente ($\Delta_m < \Delta_p$) le pouvoir d'une lentille concave, chacun d'eux se plaçant de manière à voir nettement, z' différent, l'image virtuelle d'un objet éloigné.

La formule (5) est celle que nous adopterons pour la lentille concave dans la lunette de Galilée, z' étant négligeable par rapport à p_1, qui devient le centre optique de l'objectif, et Δ la distance de l'observateur à l'image virtuelle due à la lentille divergente, distance variable avec le tirage, d'un observateur à un autre, mais en réalité en faible proportion. Cette distance Δ diffère totalement de la vision distincte à l'œil nu, dans la lunette de Galilée, attendu que l'image virtuelle est celle de l'objectif, comme nous le verrons, et non plus celle de l'objet visé. Cette distance est de l'ordre de grandeur de $f - x'$, quand l'observateur est tout contre l'oculaire.

Dans la figure précédente, nous avions, comme on a l'habitude de le faire dans les ouvrages, pris un objet dont les dimensions sont celles de l'oculaire, mais il convient, ce qui est la réalité, de supposer que l'on est en présence d'un objet infiniment grand et éloigné par rapport aux dimensions de l'oculaire, c'est-à-dire faisant son image *au foyer principal* de la lentille en F. On voit que si le diamètre apparent d'un objet BM infiniment éloigné n'est pas nul pour l'observateur placée en K′ et regardant à l'œil nu (*fig.* 16).

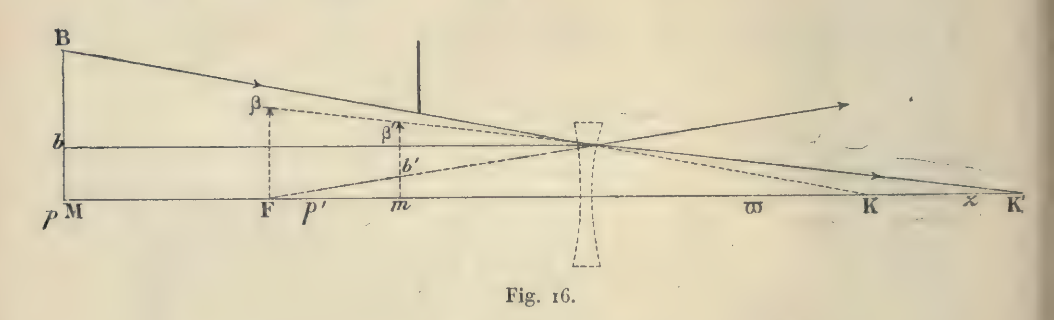


Fig. 16.

l'image virtuelle sera vue sous un diamètre apparent *du même ordre de grandeur* en K′.

Dans les ouvrages élémentaires, on a la mauvaise habitude de ne jamais figurer les rayons visuels et les objets sont toujours pris de même dimension que l'oculaire. De sorte qu'un objet placé à une distance p, faisant son image virtuelle en p' donné par la relation

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$

on représente l'image par $b'm$, négligeant d'indiquer que $\beta'm$ serait la dimension de l'image si l'objet avait la dimension BM au lieu de bm. De

plus, ne raisonnant toujours que sur un objet bM, quand $p = \infty$, $p' = f$ et la figure montre que $b'm$ prend les dimensions d'un point en F. Alors que si, au fur et à mesure que l'objet est vu plus éloigné, ses dimensions augmentent de manière que l'angle apparent BK'M reste constant, autrement dit, si l'objet infiniment éloigné a un diamètre apparent comme le Soleil ou les planètes, son image virtuelle a la dimension βF *rigoureusement au foyer principal de l'oculaire.* La diminution du diamètre apparent est alors donnée par la formule

$$D = \frac{f}{\Delta}$$

ayant $\Delta = f + z$, z étant la distance à laquelle l'observateur s'est placé pour voir nettement l'image virtuelle βF.

II. — Théorie complète en tenant compte de la réfraction de l'œil

I. — DE LA VISION DISTINCTE A TRAVERS UNE LENTILLE DIVERGENTE

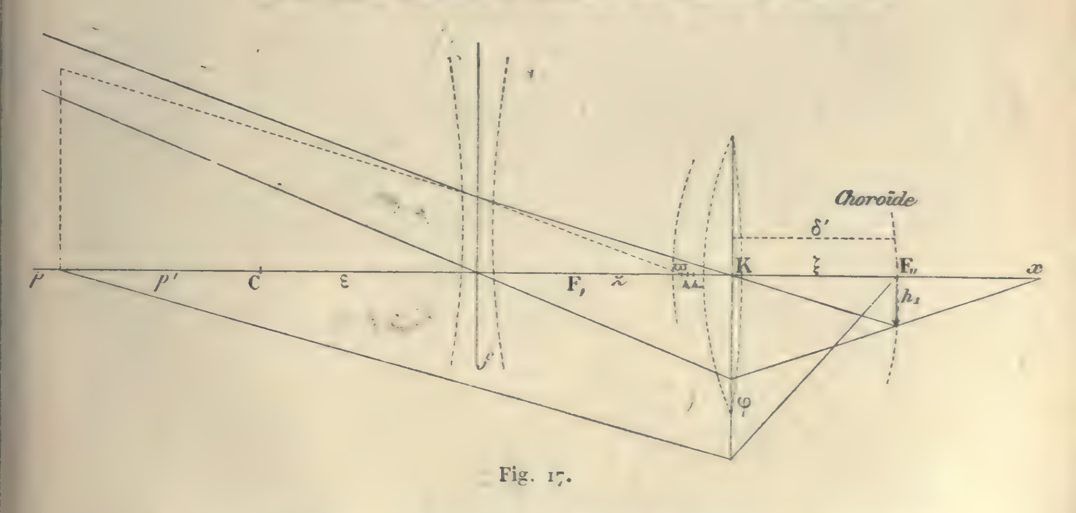


Fig. 17.

La question de la vision distincte à travers les lentilles divergentes est fondamentale dans la lunette de Galilée, puisque c'est la lentille biconcave intercalée entre l'œil de l'observateur et l'objectif qui rend nette l'image grossie.

Comme d'un autre côté les anciens reportaient l'image virtuelle à la

vision distincte *à l'œil nu*, il importe donc de montrer l'erreur qu'ils *commettaient* et que l'on avait reconnue, puisque l'on trouvait que les images virtuelles ainsi construites étaient 4 fois trop grandes. Il convient donc de revenir sur la vision distincte à travers les lentilles divergentes.

Lorsqu'un myope dont la vision distincte minima à l'œil nu, est de 15 centimètres, celle de la lecture, fait usage de verres divergents, il désire ainsi reporter sa vision distincte minima à une distance qui, pour la lecture, ne soit pas ridicule comme celle de 15 centimètres. C'est ainsi qu'avec un verre biconcave n° 13 qui correspond à 3 dioptries, nous avons notre vision distincte minima reportée de 15 centimètres à 23 centimètres, celle de la vision normale minima. D'après la relation

$$N_D \times f = 100^c,$$

la distance focale principale de ce verre était de $\frac{100^c}{3} = 33^c,33$. La vision distincte minima, celle où l'on devait placer l'objet pour le voir nettement à travers la lentille étant de 23 centimètres, savoir $p + \varepsilon = 23^c$, il était facile de calculer la position p' de l'image virtuelle visée à travers la lentille par la formule habituelle

$$\frac{1}{p'+\varepsilon} - \frac{1}{23} = \frac{1}{33} \qquad \text{d'où} \qquad p' + \varepsilon = 13^c,55.$$

Si l'on remarque que la distance de l'œil au verre est facilement de $1^c,5$, on retrouve donc la vision distincte minima *à l'œil nu* que nous avions rigoureusement déterminée de la façon suivante.

Il suffit de tracer dans une carte avec un canif deux traits parallèles et de regarder la lumière qui filtre à travers ces deux traits.

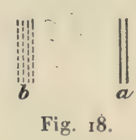


Fig. 18.

Lorsque l'on est exactement à la vision distincte minima, la lumière qui filtre à travers les traits donne l'apparence de *a*, qui passe à l'apparence *b* traits élargis empiétant les uns sur les autres quand on rapproche la carte en deçà de la vision distincte.

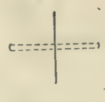


Fig. 19.

Ce procédé est tellement sensible qu'il permet de reconnaître l'astygmatisme de l'œil. La distance pour laquelle le trait vertical est net (*fig.* 19) donne pour le trait horizontal une apparence étalée.

Ainsi l'on a enseigné avec raison que lorsque l'on voyait nettement un objet à travers une lentille divergente son image virtuelle était à la vision distincte à l'œil nu (*fig.* 71). Si les efforts d'accommodation sont restreints, on trouve que pour voir nettement un objet à 3 mètres, c'est-à-dire aussi nettement qu'à la vision distincte minima, on aurait

$$N_D = 100\left(\frac{1}{13,55} - \frac{1}{300}\right) = 7,0.$$

Ainsi le numéro du verre devrait être porté de 13^p à $5^p\ ^1/_2$ qui correspond pareillement à 7,0 dioptries. Il faut donc des verres de plus en plus forts à mesure qu'on cesse de regarder des objets placés au-delà de la distance de la lecture.

Un myope qui voudrait voir un objet très éloigné $p = \infty$, et de manière que son image virtuelle fût à sa vision distincte $p' + \varepsilon = 13,5$ devrait employer un verre $N_D = \frac{100}{13,5} = 7,4$.

Cela posé, prenons un verre biconcave très fort, celui même d'une jumelle de théâtre. Au sphéromètre on mesure 21,5 dioptries, ce qui correspond à une distance focale $\frac{100^c}{21,5} = 4^c,6$. Si l'on regarde à travers cette lentille un objet à 83 mètres, pour le voir nettement, il faut que l'œil se recule de l'oculaire de 10 centimètres et comme la vision distincte minima était de 15 centimètres, on retrouve pour la distance focale le chiffre ci-dessus, l'image virtuelle, comme on voit, se trouvant à la distance focale principale, position conjuguée de l'infini.

Ainsi par tous ces exemples il est bien démontré, ce que l'on savait, que l'image virtuelle $(p' + \varepsilon)$ obéissant à la formule

$$\frac{1}{p' + \varepsilon} - \frac{1}{p + \varepsilon} = \frac{1}{f},$$

était celle que l'œil visait.

La figure 17 nous montre donc dans ces conditions la marche des rayons qui traversent la lentille divergente et viennent faire image sur la choroïde exactement comme ceux qui, venus de la vision distincte minima n'ont traversé que le cristallin, ce sont les rayons au-dessous de l'axe principal. Ici on a donc

$$(p' + \varepsilon) + z = \Delta,$$

où p' est fixe et déterminé et par suite z' dépend de Δ et de $p' + \varepsilon$. On déterminera la grandeur h_1 de l'image qui se fait sur la choroïde en déterminant d'abord la distance x de l'anneau oculaire par la relation

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{d'où} \qquad z = x\frac{\varphi}{z - \varphi}.$$

On voit que la condition fondamentale pour qu'il puisse y avoir une image réelle h_1 sur la choroïde est que $z > \varphi$.

L'œil étant un milieu réfringent unique dans lequel la première distance focale principale $F_{\prime}h_{\prime}$ est égale à $15^{m},0072$ et la seconde $F_{\prime\prime}h_{\prime\prime}$ à $20^{mm},0746$ nous avons substitué à l'œil une lentille dans l'air formant deux milieux, le cristallin et l'air, dont K serait le centre optique et dont φ serait la valeur moyenne de ces deux nombres savoir $\frac{37{,}0818}{2} = 18{,}5409 = \varphi$.

Donc F_1 étant à une distance de $12^{mm},83$ de la cornée transparente, pour que l'on ait une image réelle x du centre optique de l'oculaire il faut que $F_{\prime}$ soit au-delà de ce centre. La grandeur minima de z' sera donc égale à $12^{mm},83 + 8^{mm} - 0^{mm},56 = 20^{mm},27$ et, dans ces conditions $z - \varphi > 1$. C'était donc encore une erreur commise par les auteurs d'enseigner que l'œil est *tout contre* la lentille biconcave. La grandeur minima du point nodal de l'œil est de 2 *centimètres*, distance à l'oculaire dans tous les appareils d'Optique pour qu'il y ait formation d'une image sur la choroïde comme dans la vision avec accommodation. C'est-à-dire que dans une lentille divergente de $4^{c},6$ de distance focale, elle est du même ordre de grandeur.

Cela posé, supposons l'œil muni d'une lentille divergente très forte $21^{D},5$ et voyant nettement pour une distance convenable, $z = 10$ centimètres de l'oculaire, un objet situé à une distance p. On est donc à la vision distincte de l'image virtuelle $a''x'$ de l'*objet* (*fig.* 20).

Dès que l'on intercale une lentille convergente C entre l'objet et la lentille divergente on constate de suite ce que montre cette figure et ce que vérifie l'expérience.

Pour continuer à voir *nettement* il faut invinciblement *se rapprocher* de l'oculaire. Et si nous négligeons provisoirement la réfraction de l'œil, celui-ci devra s'approcher de telle façon que la choroïde soit en coïncidence avec l'image optique i que fournit l'objectif.

Dans ces conditions on conclut : 1° Que l'on ne voit qu'*une fraction ap* de Ap que l'objectif seul fournirait (ia' fraction de iA') ;

2° Que cette fraction occupe la même surface du diaphragme E'_1 que $A''p$ avant l'intercalation de l'objectif et par suite que celui-ci produit le grossissement ;

3° Que l'image est vue droite avant et après qu'on a intercalé l'objectif;

4° Que la choroïde placée en *i* n'est pas à la vision distincte de l'image virtuelle de l'objet $a''x'$ et cependant que l'on voit nettement cet objet;

5° Que du reste il n'existe plus qu'une image virtuelle de l'*objectif C*, placée en *C'*.

En résumé pour voir nettement il a été indispensable que la lentille fût assez forte pour que l'image optique fournie par l'objectif fût en-deça de position de l'œil visant l'image virtuelle fournie par l'oculaire seul.

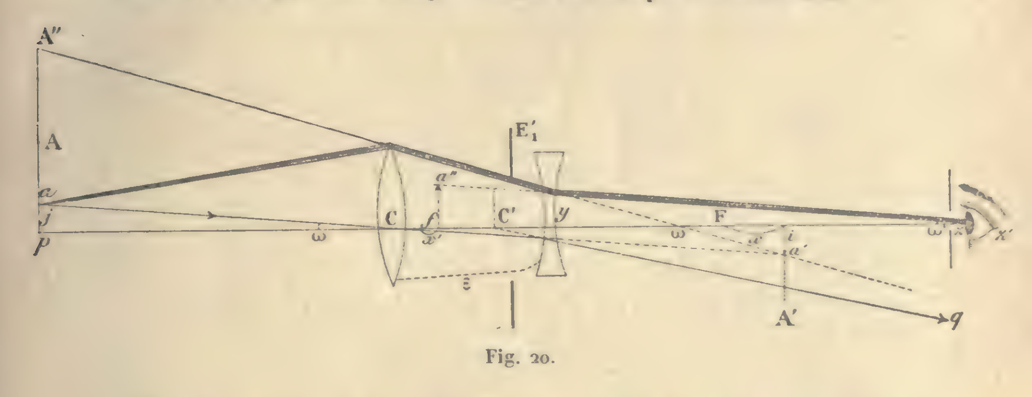


Fig. 20.

Nous formulerons ce premier théorème. 1er *théorème*. Lorsqu'un myope regarde un objet avec un verre biconcave situé à deux centimètres de son point nodal et qu'il voit cet objet très nettement, lorsqu'il intercalera une lentille convergente entre l'objet et cet oculaire biconcave, il verra l'objet agrandi et droit, mais *il n'en aura jamais une vision nette* quelle que soit l'écartement ε des deux lentilles, parce que l'image de projection ne se forme plus sur la choroïde. Et alors nous arrivons à cette conclusion que l'on a suivie dans la pratique ; l'oculaire biconcave doit être BEAUCOUP PLUS FORT que celui dont le myope ferait usage pour voir un objet éloigné, de manière que l'œil étant tout contre et regardant directement un objet on ait une vision absolument trouble provenant de ce que l'image ne se fait plus sur la choroïde.

Cette fois, en intercalant une lentille biconvexe entre l'objet et l'oculaire, on peut ramener l'image sur la choroïde et avoir une vision nette. Telle est la clef de la vision nette dans la lunette de Galilée et sur laquelle nous allons nous étendre. Tel est le point qui n'avait jamais été indiqué et qui nous explique que myopes et presbytes voyant trouble à travers une lentille biconcave très forte placée tout contre l'œil, auront une vue nette des objets lorsque, par un tirage convenable, on ramènera l'image de *projec-*

tion du système exactement sur la choroïde. En même temps, nous aurons une notion nouvelle qui avait complètement échappé aux auteurs et leur fit faire toutes ces erreurs de construction de l'image virtuelle, la preuve d'une vision nette alors que l'image virtuelle est à *quelques centimètres de l'œil.*

Il est vrai, comme nous le montrerons, que cette image virtuelle n'est jamais visée, qu'elle *n'est plus celle de l'objet* quand on a intercalé la lentille convergente C. Car cette image virtuelle est celle *de l'objectif.* Donc on ne la vise pas, quand on a une vision nette de l'objet.

II. — DE LA VISION A TRAVERS UNE LENTILLE CONVERGENTE

1er *Théorème.* — Lorsque l'on intercale une lentille convergente K munie d'un diaphragme E, entre une lentille convergente et l'image optique d'un objet qu'elle peut fournir, on ne reçoit plus au nouveau foyer conjugué qu'une fraction de l'objet visé à travers le même diaphragme.

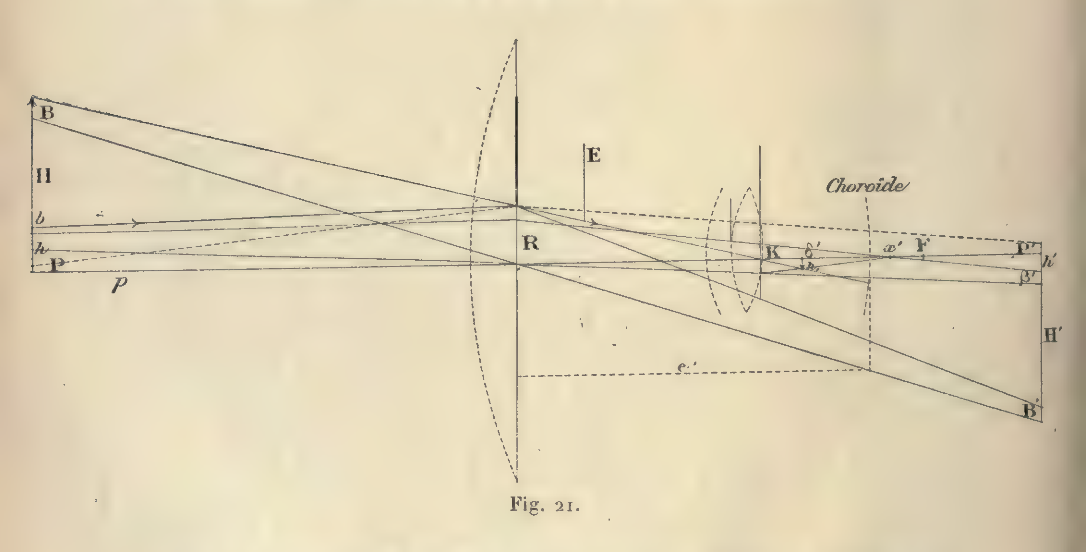


Fig. 21.

Ainsi H étant l'objet placé en P, H′ son image optique en P′ formée par la première lentille convergente. Si l'on intercale en K une autre lentille convergente, il se forme une image h_1, au foyer conjugué des deux lentilles, image d'une fraction de l'objet de grandeur h.

Si la lentille convergente intercalée est l'œil d'un observateur, celui-ci aura une vision trouble de h, puisque h_1 est en avant de la choroïde, mais

il n'en pourra pas moins bien juger qu'il n'aperçoit plus qu'une fraction h de H qu'il apercevait à l'œil nu à travers le diaphragme R. Et le grossissement correspondant s'exprime par le rapport $\frac{h}{H}$ qu'on peut mesurer. En outre h est vu droit comme H.

Quand on place, en outre, devant l'œil et *tout contre* une lentille biconcave on a la lunette de Galilée. Le grossissement précédent est diminué comme nous le verrons par celle-ci dans le rapport de 1 à 0,95, c'est-à-dire très peu Il en résulte donc que le grossissement de l'objectif seul représente comme première approximation celui de la lunette de Galilée. Par suite nous nous expliquons ce que nous avions observé quand nous disions :

« Prenons une jumelle de théâtre mise au point, puis dévissons l'oculaire et l'objectif tourné vers une fenêtre, déterminons en l'image optique. Il suffit de mettre un papier transparent au foyer conjugué de la fenêtre et en se plaçant à la vision distincte du papier l'image optique très nette est vue par transparence. Le diaphragme, qui est dans la lunette, limite l'image optique de la fenêtre à deux carreaux et demi. Cela posé, revissons l'oculaire et visons la fenêtre. Bien que l'œil soit beaucoup plus près du diaphragme que l'image optique, on ne perçoit plus qu'*un carreau.* Donc cette expérience, que tout le monde peut répéter, prouve l'inexactitude de l'hypothèse primitive des auteurs. L'image de projection fournie par la première lentille n'était pas celle que l'on voyait agrandie. »

Mais en outre comme notre figure permettait d'expliquer ce que l'on voyait, c'est-à-dire une fraction h vue sous le même angle que H à l'œil nu, et par suite paraissant agrandie, il en résulte qu'elle permettait de donner la véritable théorie de la lunette de Galilée, si l'on arrivait en outre à expliquer la vision nette quand on intercale une lentille divergente entre l'objectif et l'œil de l'observateur.

C'est ce que nous allons faire.

2e *Théorème.* — Lorsque l'on intercale une lentille divergente entre deux lentilles convergentes, on reporte l'image conjuguée dans celles-ci à une certaine distance de sa position primitive.

Ainsi h_1 étant l'image de projection de l'objet, il suffit d'intercaler la lentille divergente (*fig.* 22) pour que h_1 soit reportée en h_2.

Or, si K était l'œil d'un observateur, h_1 était en avant de la choroïde, d'où vision trouble, en intercalant la lentille divergente à une distance convenable de l'objectif, on pourra donc amener h_2 à se former exactement sur la choroïde d'où vision nette.

Il nous est facile maintenant de comprendre que ici comme dans la loupe le rôle de l'oculaire est *avant tout* de ramener sur la choroïde l'image h_1 qui se faisait en avant de celle-ci.

Ainsi dans la loupe [1] les lentilles biconvexes ramenaient sur la choroïde les images des objets, en deçà de la vision distincte, qui se faisaient *au-delà* de celle-ci. Les lentilles biconcaves de même ramèneront sur la choroïde les images qui se font *en avant*.

Tel est le rôle fondamental de ces lentilles. Elles n'interviennent que *secondairement* pour modifier le grossissement. En effet nous avons dit que quand l'œil est *tout contre* l'oculaire dans la lunette de Galilée, celui-ci diminue de 0,05 le grossissement dû à l'objectif seul.

La figure suivante montre que le fait d'intercaler une lentille divergente entre deux lentilles convergentes suffit à éloigner du centre optique de la dernière, l'image h_1 de projection. On conçoit dans ces conditions que cette image puisse être ainsi amenée à se projeter à une distance déterminée qui sera la choroïde. Nous supposons qu'en même temps que l'on intercale la lentille biconcave, on recule un peu la lentille convergente de K en K′ de manière que la direction des nouveaux rayons soit précisément celle du point nodal de l'œil.

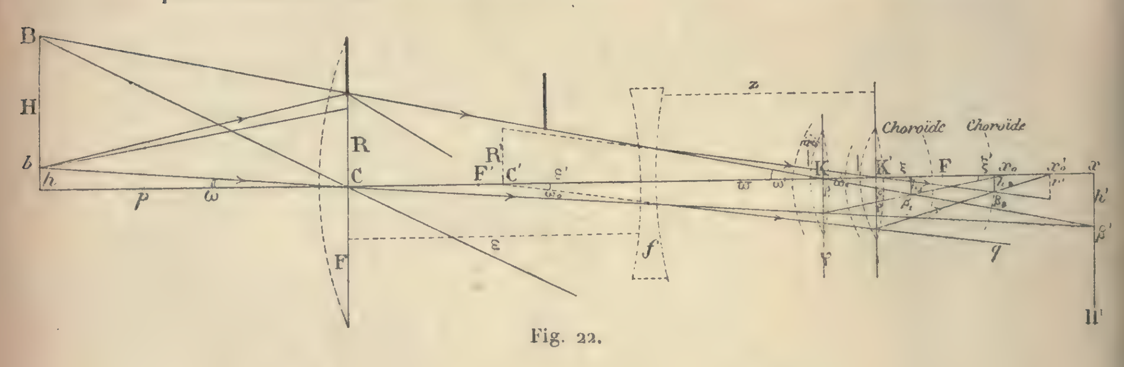


Fig. 22.

On voit que le seul fait d'intercaler une lentille divergente entre deux lentilles convergentes reporte l'image h_1 en h_2. Si donc en h_2 se trouve la choroïde, l'observateur verra nettement l'image h_1 qui était trouble. En même temps l'angle visuel en K′ sera diminué, mais très peu si l'œil est tout contre la lentille divergente. En outre R′ est l'image virtuelle de R et x le foyer conjugué de C' *au-delà* de la choroïde de l'observateur. On voit donc très nettement l'objet h et l'on ne vise nullement l'*image virtuelle de l'objectif située à quelques centimètres de l'œil.*

L'ensemble des deux théorèmes nous donne toute la théorie de la lunette de Galilée.

(1) *Théorie nouvelle de la loupe et de ses grossissements* (Librairie scientifique A. Hermann).

Dans cette figure on voit que x_0, est l'anneau oculaire de l'objectif par rapport au cristallin de distance focale ρ, on a donc pour la distance x_0 de cet anneau au point nodal.

$$x_0 = \varphi \frac{\varepsilon + \varpi}{\varepsilon + \varpi - \rho} \qquad \text{déduit de} \qquad \frac{1}{\varepsilon + \varpi} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\rho}$$

D'un autre côté quand on intercale la lentille divergente, les choses se passent comme si les rayons au lieu de venir de C venaient de C', comme en même temps le point nodal s'est porté en K' pour que l'observateur vît les rayons incidents dans leur nouvelle direction, le nouvel anneau oculaire est à une distance x'_0 donnée par la formule (z étant la distance de K à l'oculaire.)

$$x'_0 = \rho \frac{\varepsilon' + z}{\varepsilon' + z - \rho}.$$

Les relations entre l, l' sont données par les propriétés des lentilles divergentes.

Entre ϖ et z on a la relation d'un faisceau de rayons convergents tombant sur une lentille biconcave de distance focale f

$$\frac{1}{\varpi} - \frac{1}{z} = \frac{1}{f}.$$

Entre ε et ε' celle d'un faisceau de rayons divergents tombant sur la même lentille

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{f}.$$

Pour une hauteur h visée à travers l'objectif il est facile de calculer les positions et les grandeurs des images h_1, h_2 avant et après l'intercalation de la lentille biconcave et par suite le tirage qu'il faudra donner pour que l'image h_2 se fasse exactement sur la choroïde.

On a

$$h = p \operatorname{tang} \omega, \qquad R = (\varepsilon + \varpi) \operatorname{tang} \omega', \qquad \rho = (\varepsilon + \varpi) \operatorname{tang} \omega$$

$$h_1 = \xi \operatorname{tang} \omega'$$

$$\frac{x_0 - \xi}{h_1} = \frac{x_0}{\rho} \qquad \text{d'où} \qquad \xi = \frac{x_0 \rho}{\rho + x_0 \operatorname{tang} \omega'};$$

et encore

$$h_2 = \xi' \operatorname{tang} \omega_1$$

$$\frac{x'_0 - \xi'}{h_2} = \frac{x'_0}{\rho'} \qquad \text{d'où} \qquad \xi' = \frac{x'_0 \rho'}{\rho' + x'_0 \operatorname{tang} \omega_1};$$

avec les relations

$$\rho' = (\varepsilon' + z) \operatorname{tang} \omega_0$$

$$\varpi \operatorname{tang} \omega' = z \operatorname{tang} \omega_1, \qquad \varepsilon \operatorname{tang} \omega = \varepsilon' \operatorname{tang} \omega_0$$

d'où

$$\rho' = (\varepsilon' + z) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \operatorname{tang} \omega'.$$

Donc la condition fondamentale de la vision nette sera que l'on ait

$$\xi' = \delta' = 15^{mm},1234$$

δ' étant la distance de la choroïde au point nodal de l'observateur.

Quand l'œil est *tout contre* la lentille divergente, la distance, comme nous l'avons vu, de la cornée transparente, est encore au moins à $12^{mm},83$ de celle-ci, par suite le point nodal est à deux centimètres *au minimum* du centre optique de l'oculaire.

On a par suite

$$z = 2^{cent}, \qquad \varpi = f \frac{2}{f + 2}.$$

quand l'œil est tout contre et en exprimant f en centimètres.

L'équation de condition de la vision nette $\xi' = \delta'$ donne

$$\rho' + x'_0 \operatorname{tang} \omega_1 = x'_0 \frac{\rho'}{\delta'}.$$

En mettant pour ρ' et x'_0 leurs valeurs ci-dessus, on a

$$\varphi \frac{\varepsilon' + z}{\varepsilon' + z - \varphi} \operatorname{tang} \omega_1 = \left[\frac{\varphi}{\delta'} \frac{\varepsilon' + z}{\varepsilon' + z - \varphi} - 1\right] (\varepsilon' + z) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \operatorname{tang} \omega.$$

Si l'on remarque comme d'habitude que pour les objets suffisamment éloignés le rapport $\frac{\operatorname{tang} \omega_1}{\operatorname{tang} \omega}$ représente le grossissement G, que d'un autre côté d'après la relation entre ε', ε, f, on a $\varepsilon' = \varepsilon \frac{f}{f + \varepsilon}$ d'où l'on déduit

$$(\varepsilon' + z) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \varepsilon \frac{f + z}{f} + z$$

et qu'en se plaçant dans les conditions ordinaires de l'observation l'*œil*

tout contre l'oculaire ($z = 2$ cent.), auquel cas z est négligeable par rapport à ε, la formule ci-dessus deviendra

$$\varphi \frac{\varepsilon' + z}{\varepsilon' + z - \varphi} G = \frac{(\varphi - \delta')(\varepsilon' + z) + \varphi\delta'}{\delta'(\varepsilon' + z - \varphi)} \varepsilon \frac{f + z}{f}$$

d'où

(F) $$\varphi(\varepsilon' + z) G = \left(\frac{\varphi - \delta'}{\delta'}(\varepsilon' + z) + \varphi\right) \varepsilon \frac{f + z}{f}.$$

Telle est la relation fondamentale donnant le tirage ε, en fonction du grossissement et de la réfraction spéciale φ de l'œil de l'observateur.

On peut examiner en particulier le cas. sachant que pour l'œil normal

$$\varphi = 18^{mm},54 \qquad \delta' = 15^{mm},12$$

où soit par des efforts d'accommodation, soit effectivement, on aurait

$$\varphi - \delta' = o.$$

Dans ces conditions la formule (F) deviendrait

(F') $$(\varepsilon' + z) G = \varepsilon \frac{f + z}{f}.$$

Or, raisonnons ici comme les auteurs qui avaient supposé que l'œil pouvait être considéré comme placé au centre optique de l'oculaire savoir $z = o$, la formule (F') donne alors

$$\varepsilon' G = \varepsilon$$

savoir

$$G = \frac{f + \varepsilon}{f}$$

Or, quand on suppose comme les auteurs, que le foyer principal de l'oculaire, coïncide avec celui de l'objectif pour un observateur infiniment presbyte on obtient $f + \varepsilon = F$ et l'on retrouve la formule du grossissement des auteurs

$$G = \frac{F}{f}.$$

On voit donc toutes les hypothèses absolument inexactes qu'il faut faire pour retrouver le grossissement tel que les auteurs l'avaient donné.

Mais en outre, cette expression du grossissement quand on suppose

$f + \varepsilon = F$ est, comme notre formule générale nous l'a donné, celle de *l'objectif*, pour un observateur placé à une distance ε de celui-ci et regardant un objet à l'infini. En effet, si l'objet est à une distance finie, on avait pour le grossissement de *l'objectif*

$$G = \frac{F + x}{F + x - \varepsilon},$$

qui se réduit à $\frac{F}{F - \varepsilon}$ si l'objet visé est à l'infini.

On voit donc que le prétendu grossissement de la lentille de Galilée était, en mettant pour f la valeur supposée $F - \varepsilon$, le grossissement de *l'objectif seul*. Et comme nous verrons que quand l'œil est tout contre l'oculaire, la diminution dûe à celui-ci représentée par la formule $\frac{f - x''}{\Delta}$, où Δ est la distance de l'œil à l'image virtuelle *très près de l'oculaire*, c'est-à-dire où Δ diffère peu de $f - x''$, est voisine de 0,95, il en résulte que le grossissement mesuré dans ces conditions avec la lunette de Galilée s'écarte peu de la valeur $\frac{F}{f}$, ce qui a conduit les auteurs à croire à l'exactitude de tout ce qu'ils avaient enseigné. Mais il suffisait d'écarter l'œil de l'oculaire pour voir apparaître l'influence énorme du coefficient $\frac{f - x''}{\Delta}$, où Δ prenait des valeurs de plus en plus grandes.

En ce qui concernait la formule (F') impossible de négliger $z = 2^c$ du même ordre de grandeur que $\varepsilon' = 3^c$ pour un tirage de 9 centimètres. Et cette formule revenait à

$$(F'') \qquad \varepsilon^2 - \varepsilon f(G - 1) = z\,\frac{f^2}{f + z}\,G.$$

Tel est pour un œil pour lequel on suppose $\varphi - \delta' = 0$, la relation que l'on doit satisfaire pour voir nettement un objet avec la lentille de Galilée, c'est-à-dire pour que son image se fasse sur la choroïde. Si l'on suppose qu'il soit à l'infini et comme première approximation, l'œil étant tout contre, que le grossissement de la lunette soit celui de l'objectif, savoir

$$G = \frac{F}{F - \varepsilon},$$

en substituant cette valeur dans (F''), il vient finalement

$$F - \varepsilon = f\sqrt{1 + \frac{4z^2}{(f + z)^2}}.$$

Donc la relation des auteurs du calcul du grossissement $\frac{F}{f}$ s'écartait d'autant plus de la valeur réelle $\frac{F}{F - \varepsilon}$ que l'oculaire était plus fort. Pour un oculaire de distance focale de 2 centimètres, le grossissement était représenté par $\frac{F}{\sqrt{2}f}$ et non par $\frac{F}{f}$, en négligeant dans les deux cas l'influence de l'oculaire comme diminuant légèrement ces grossissements. L'inexactitude de la formule des auteurs était bien démontrée. Ce n'est donc qu'avec des oculaires assez faibles pour que ε pût être négligé par rapport à f que l'expérience a donné des grossissements semblant satisfaire à la valeur $\frac{F}{f}$.

Bien entendu, il n'y avait plus AUCUNE THÉORIE de la lunette de Galilée, quand l'œil s'écartait de l'oculaire, alors cependant qu'en modifiant le tirage on voyait nettement. Enfin quand l'observateur se plaçait *au-delà* de l'image de projection et que l'on voyait nettement cependant les objets toujours droits, plus de théorie dutout. Nous allons montrer au contraire que *dans tous les cas* le grossissement est donné par la formule générale

$$G = \frac{F + x}{F + x - \varepsilon} \frac{f - x''}{\Delta}.$$

Δ étant la distance qui sépare l'image virtuelle (de l'objectif) de l'observateur, *voyant toujours distinctement* l'objet dont l'image de projection se fait, grâce au tirage ε, sur la choroïde. Quant à l'image virtuelle, toujours *en deçà* du foyer principal de l'oculaire, c'est-à-dire à quelques centimètres de l'oculaire ; elle est liée à l'écartement des deux lentilles par la relation $\frac{1}{f - x''} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{f}$ et non plus par $\frac{1}{f - x'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ qui se vérifiait avant qu'on eût intercalé l'objectif entre l'objet visé et la lentille divergente.

En résumé, la discussion de la formule (F) que pour simplifier nous avons ramenée à (F'), nous a prouvé, que par un écart convenable ε des deux lentilles, on peut toujours ramener l'*image de projection d'un objet visé* à travers ces deux lentilles l'une convergente et l'autre divergente à se faire exactement sur la choroïde. Que l'image virtuelle la seule formée est en réalité celle *de l'objectif*, image *très près de l'oculaire*, à 3 centimètres pour un écart de 9 centimètres des deux lentilles, et une distance focale de $4^c,6$; qu'à cette image correspond toujours dans le plan de l'anneau oculaire du cristallin, une image de projection au delà de la choroïde quand le tirage permet de voir nettement l'objet visé.

Donc dans la lunette de Galilée, il *n'y a jamais eu formation d'une image virtuelle* D'UN OBJET VISÉ.

Lorsqu'on est à la vision distincte de l'objet, *on n'est jamais en même temps* à la vision distincte de l'image virtuelle de l'OBJECTIF, la seule formée, et *par suite celle-ci n'est jamais visée.*

On voit toutes les erreurs enseignées jusqu'ici et qui avaient amené les auteurs croyant qu'on visait l'image virtuelle de l'objet à vouloir placer celle-ci à la vision distincte minima de l'observateur.

Il nous est maintenant facile d'arriver à la formule précédente du grossissement. Le tirage donné ayant été tel que l'on vît nettement l'*objet*, l'image h_2 de projection (*fig.* 22) se faisait exactement sur la choroïde. D'un autre côté les droites menées par les extrémités de h_2 et le point nodal K′ étant des lignes de direction de la vision, l'angle ω_1 que sous-tend l'image virtuelle de l'*objectif* est donc un angle visuel. D'un autre côté ω est l'angle visuel sans lequel on viserait de K′ l'objet si celui-ci était très éloigné. Comme dans la lunette astronomique le grossissement G est donc donné par la formule

$$G = \frac{\operatorname{tang} \omega_1}{\operatorname{tang} \omega}.$$

Mais on a identiquement

$$\frac{\operatorname{tang} \omega_1}{\operatorname{tang} \omega} = \frac{\operatorname{tang} \omega'}{\operatorname{tang} \omega} \times \frac{\operatorname{tang} \omega_1}{\operatorname{tang} \omega'}.$$

Or, comme nous l'avons vu, $\frac{\operatorname{tang} \omega'}{\operatorname{tang} \omega}$ est le grossissement de l'objectif seul. En représentant ici par $\varepsilon + z$ la distance de point nodal à l'objectif qui avait été représenté par z quand on n'avait été en présence que de l'objectif, le grossissement a alors pour valeur

$$\frac{\operatorname{tang} \omega'}{\operatorname{tang} \omega} = \frac{F + x}{F + x - (\varepsilon + z)}$$

De même $\frac{\operatorname{tang} \omega_1}{\operatorname{tang} \omega'}$ représente la diminution de grandeur des objets qu'apporte la lentille divergente. Nous avons obtenu pour cette diminution

$$D = \frac{p'_1}{p_1} \frac{z + p_1}{z + p'_1}.$$

Ici p_1 est la distance de l'objectif à la lentille divergente, savoir ε, p'_1 c'est ε' ou $f - x$;″ on a donc en remarquant encore que $z + p'_1$ est la

distance du point nodal à l'image virtuelle que nous avons représentée par Δ

$$D = \frac{f - x''}{\Delta}\frac{z + \varepsilon}{\varepsilon}$$

La formule générale quand l'œil est à une distance quelconque de l'oculaire est donc

(A) $$G = \frac{F + x}{F + x - (\varepsilon + z)}\frac{f - x''}{\Delta}\frac{z + \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Dans la lunette de Galilée proprement dite et quand l'œil est tout contre l'oculaire $z = 2^c$ négligeable par rapport à ε, ce grossissement s'exprime par la formule

(B) $$G = \frac{F + x}{F + x - \varepsilon}\frac{f - x''}{\Delta};$$

Sachant que $f - x''$ est lié à ε par la relation

$$\frac{1}{f - x''} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{f}.$$

Si l'on supposait que l'objet fut à l'infini, la formule ci-dessus reviendrait à

$$G = \frac{F}{F - \varepsilon}\frac{f - x''}{\Delta}.$$

Or, quand l'œil est tout contre, $\frac{f - x''}{\Delta}$ est peu éloigné de l'unité : 0,95. Si d'un autre côté on admettait comme les auteurs, ce qui est inexact, que la distance z du point nodal de l'œil à l'oculaire fût nulle et non au minimum égale à 2^c, dans ces conditions, comme nous l'avons vu, la relation

$$F - \varepsilon = f\sqrt{1 + \frac{4z^2}{(f + 2)^2}},$$

donnerait $F - \varepsilon = f$ pour $z = 0$,

et l'on retrouverait le grossissement des auteurs

$$G = \frac{F}{f}.$$

Mais l'on voit toutes les hypothèses inexactes qu'il faut faire pour le retrouver, et cette formule ne représente comme nous l'avons fait remarquer que le grossissement de l'objectif et dans le cas très particulier où la dis-

tance de l'œil à l'image de projection, savoir F — ε a numériquement la même valeur que f.

Ainsi alors que les auteurs n'avaient attribué à l'objectif qu'une propriété de projection, leur propre formule indiquait que lui seul intervenait dans le grossissement observé, puisqu'ils annulaient effectivement toutes les propriétés de la lentille divergente en supposant l'œil au centre optique de celle-ci.

Nous avons examiné dans la partie expérimentale, le cas de l'œil *au delà* de l'image optique de projection et vérifié dans l'expression générale du grossissement, l'influence énorme de la lentille divergente dont l'importance était relativement nulle au point de vue du grossissement (nous ne parlons pas de la vision nette), quand l'œil était tout contre l'oculaire.

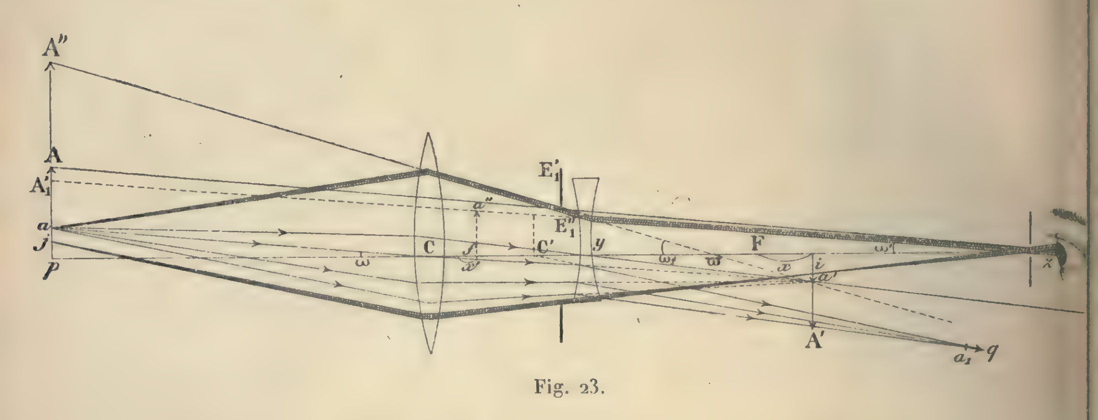


Fig. 23.

La figure ci-contre montre la marche des rayons visuels lorsque l'observateur est au delà de l'image de projection. Jusqu'ici on avait fait le silence sur l'observation à travers la lunette de Galilée dans ces conditions. Dans cette figure l'œil s'était placé à la vision distincte de l'image virtuelle $a''x'$ quand il regardait un objet à travers la lentille divergente *seule*. On avait donc

$$\frac{1}{f - x'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Dès que l'on intercalait la lentille convergente, il n'y avait plus formation que d'images virtuelles de l'objectif et la formule ci-dessus devenait

$$\frac{1}{f - x''} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{f}.$$

Il est facile de voir de suite, p étant toujours plus grand que z dans la lunette de Galilée, que

$$f - x'' > f - x',$$

c'est-à-dire que l'image virtuelle de l'objectif est plus rapprochée de l'oculaire que celle de l'objet comme la figure le montre, par suite que l'œil *n'est jamais*, si l'observateur z conserve sa position primitive, à la vision distincte de cette nouvelle image virtuelle, et que s'il se met à la vision nette de cette image virtuelle, il se trouve alors voir trouble l'objet visé comme nous l'avons montré précédemment.

Cette expérience que les myopes devront répéter est de la plus grande importance pour prouver ce que nous n'avons cessé de montrer que dans la lunette de Galilée c'est toujours l'*objet que l'on n'a cessé de viser*.

Ainsi, ici impossible d'amener l'image de projection sur la choroïde, puisqu'on reste placé à plusieurs centimètres de celle-ci.

Elle n'est pas visée d'un autre côté parce qu'elle est trop près et qu'elle serait vue renversée alors que l'objet paraît toujours droit comme la figure et l'expérience le montrent. Mais si myope on regarde à l'œil nu l'objet, sans lorgnon, on le voit aussi peu nettement que dans la lunette de Galilée, à cette distance de l'oculaire quelque soit le tirage. Que l'on mette au contraire le lorgnon dont on fait usage pour les objets à la distance de quelques mètres, et l'on verra alors nettement l'objet grossi avec la lunette de Galilée l'œil à 10 centimètres de l'oculaire.

Mais on sera dans l'impossibilité de voir nettement dans les mêmes conditions les objets à 83 mètres de distance, à moins qu'on n'aît préalablement pris des verres de bésigles beaucoup plus forts, et permettant tout d'abord de voir directement avec netteté.

Par conséquent comme la figure 4 du Dr S. Czapski l'admettait implicitement la vision à travers la lunette de Galilée est la même que la vision à l'œil nu. C'est toujours à l'objet même que l'on reporte l'impression lumineuse et non au punctum proximum comme on l'enseignait. C'est toujours comme le montre notre figure 23 des rayons convergents passant par le point nodal de l'œil qui vont former une image sur la choroïde. La seule différence est qu'une fraction seulement de l'objet que l'on viserait à l'œil nu, grâce à l'objectif pénètre dans l'œil sensiblement sous le même angle visuel, d'où le grossissement.

Il en résulte que pour effectuer les mesures, afin de voir nettement et à la distance de l'objet et à quelques centimètres de l'image optique, on devra regarder à travers un petit diaphragme comme dans la vision, sans accommodation, lorsque l'œil sera au-delà de l'image optique.

On voit que le grossissement se calculera ici comme précédemment, 1° en supposant d'abord l'observateur en ϖ; 2° puis en admettant qu'il soit transporté en z. On a ici à employer la formule (A), la distance de l'œil z à l'oculaire devenant du même ordre de grandeur que Δ. On voit que ici $\frac{f - x''}{\Delta}$ devient de plus en plus petit, Δ étant toujours la distance du point nodal à l'image virtuelle de l'objectif, alors que dans l'observation habituelle, l'œil tout contre, ce coefficient n'est que légèrement inférieur à l'unité si bien que le grossissement de la lunette de Galilée se réduit sensiblement au grossissement de l'objectif. L'expérience vérifiera tous ces faits.

Il nous reste pour terminer à montrer le rôle de la lunette de Galilée quand on tourne la lentille divergente vers l'objet. Ce sera la meilleure preuve que nous pouvons donner que lorsque l'œil est tout contre l'oculaire (ici lentille plan convexe) c'est toujours l'objectif qui joue le rôle primordial, soit pour grossir, soit pour diminuer les objets.

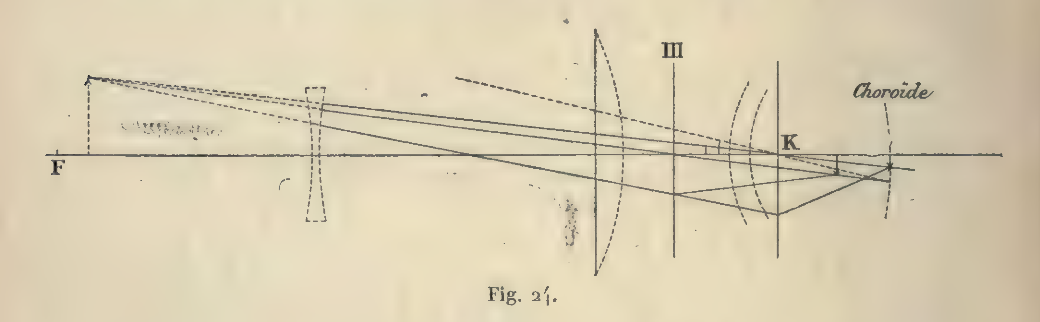


Fig. 24.

La première remarque à faire quand on regarde par le gros bout, est que *jamais* on ne voit nettement l'objet visé quelque soit le tirage, si l'on s'est placé à la vision distincte de l'objectif seul. Donc dans ces conditions l'image étant trouble ne se fait pas sur la choroïde. Toutes choses égales d'ailleurs, si tout en regardant on dévisse l'oculaire qui est ici la lentille plan-convexe, dès qu'on la retire, le champ visuel semble absolument invariable, bien que les dimensions de l'objet soient plus petites et en même temps la vision redevient très nette, puisque l'on s'était placé à la vision distincte avec l'objectif divergent seul.

Voyant 4 carreaux nets et réduits d'une fenêtre à travers la lentille divergente on a vu les mêmes 4 carreaux troubles et grossis après avoir intercalé la lentille convergente. La figure précédente rend compte de tous ces faits.

Dès qu'on intercale la lentille convergente on substitue en réalité III au système oculaire-cristallin et l'image qui se faisait préalablement sur la choroïde est reportée en avant d'où vision trouble. En même temps la ligne de direction de la vision passant par le point nodal K et représentée par une ligne pointillée fait un angle plus grand avec l'horizon que celle tracée avant qu'on eût intercalé la lentille plan convexe d'où l'explication du grossissement.

Ainsi le rôle de l'oculaire et du cristallin est celui d'une loupe par rapport à l'image virtuelle.

Et rien de semblable à ce que l'on avait observé quand la lentille plan-convexe était tournée vers l'objet, puisqu'une fraction seule était observée, alors qu'ici l'image virtuelle observée reste la même au grossissement près avant et après l'intercalation du verre convergent.

III. — Partie expérimentale

Nous allons donc tout d'abord vérifier si les propriétés des lentilles se retrouvent dans la lunette de Galilée, comme l'indique la figure du Dr Czapski et si, par suite, le grossissement est uniquement dû à la lentille convergente, la lentille divergente ne faisant que diminuer le grossissement, tout en rendant nette la vision des objets.

L'appareil qui nous a servi est une jumelle de théâtre dont nous donnons la représentation schématique quand le tirage est nul et de 13 millimètres.

Pour être exactement fixé sur la position de l'œil, position dont la distance à l'oculaire modifie de suite le grossissement, il n'y avait qu'un procédé à suivre, c'était de mettre un diaphragme d'une ouverture de 1 millimètre, immédiatement contre l'oculaire en d. Dans la figure 25, pour rendre visible l'angle $\varpi x x$ on a écarté le diaphragme d de l'oculaire. Dans ces conditions la distance du diaphragme E de 23 millimètres d'ouverture à d, était de $52^{mm},5$ et la distance de d à la face plane de l'objectif de $56^{mm},5$ sans tirage. L'ouverture du diaphragme en E′ était de $12^{mm},8$. L'épaisseur de la lentille à la hauteur de la bague, était de $7^{mm},75$ et le diamètre de cette bague de $34^{mm},5$. On peut alors calculer $33^{mm},8$ pour l'ouverture dans le prolongement des rayons dE′ à la distance de la bague pour un tirage de 13 millimètres. Par conséquent, quand on vise jusqu'à ce tirage, c'est l'ouverture E′ qui servira de guide. On vérifie et on le voit par la figure que l'on peut aller ainsi jusqu'à ce tirage.

L'introduction d'un diaphragme d'une ouverture de 1 millimètre en d, a

non seulement l'avantage de déterminer exactement la marche des rayons visuels, mais encore de voir *nettement sans accommodation*. En effet, lorsque l'on devait regarder à travers l'oculaire seul de 4^c,6, sans diaphragme, on aurait été ébloui, et il aurait été impossible de procéder à des mesures. De même à travers l'objectif seul, de même à travers le système des deux lentilles, sans tirage pour une distance quelconque, de même étant myope, sans aucune lentille. La vision sans accommodation dans toutes ces conditions avec un diaphragme est assez nette pour permettre de déterminer la coincidence de l'ouverture E′ avec différentes hauteurs, qui seront les mesures, par suite, de déterminer le grossissement et les propriétés des lentilles. Les angles visuels en K sont plus grands que les angles en d, mais ceci n'a aucune importance puisque tout est rapporté à une même ouverture E′.

Voici les mesures effectuées, en désignant toujours pour la distance, celle du diaphragme d aux objets visés,

	Distance 142 millimètres Pas de tirage	Distance 3 mètres Tirage 10 millimètres	Distance 83 mètres Tirage 5 millimètres
Oculaire et objectif.	44^{mm},5 vision trouble	53^c,0 vision nette	13^m,6 vision nette
Objectif seul . . .	43^{mm},0 vision nette	49^c,0 vision trouble	11^m,8 vision trouble
Oculaire seul . . .	66^{mm},0 vision trouble	138^c,0 vision trouble	36^m,5 vision trouble
Ni oculaire ni objectif	64^{mm},7 vision nette	128^c,2 vision nette	34^m,5 vision nette

La dernière observation avait été faite en visant les fenêtres d'un bâtiment dont le plan à l'échelle de 0^m,005 par mètre, nous permettait de retrouver de suite les dimensions des objets visés. Pour l'objectif sensiblement plan convexe les 2 courbures donnent en dioptries $16^D\ ^3/_4$ et $4^D\ ^1/_2$ moyenne $10^D\ ^3/_8$ correspondant à une distance focale principale de 9^c,6 Pour la lentille biconcave on a trouvé 21^D,5, ce qui correspond à 4^c,6 de distance focale.

La figure suivante donne la marche exacte des rayons visuels et permet de mesurer et le grossissement de l'objectif seul et celui de la lunette de Galilée (oculaire et objectif).

Le point de repère est le diaphragme E′. Le point nodal de l'observateur étant en K. S'il n'y a ni objectif, ni oculaire, l'angle visuel est Aαzp. En intercalant l'objectif seul le rayon venu de A″ est après réfraction tangent en E′ et vient ensuite en z. Il en résulte donc que, suivant la même

direction $z\alpha$, et par la même ouverture E', l'objet $A''p$ occupe la même surface que Ap, le grossissement de l'objectif seul est donc égal à $\frac{Ap}{A''p}$.

De même les rayons partis de a seront tangents en α et après réfraction à travers l'oculaire viendront passer par z comme venant de A''_1. Donc $\frac{A''_1p}{ap}$ représentera le grossissement du système objectif oculaire.

Il s'agit d'interpréter ces expériences.

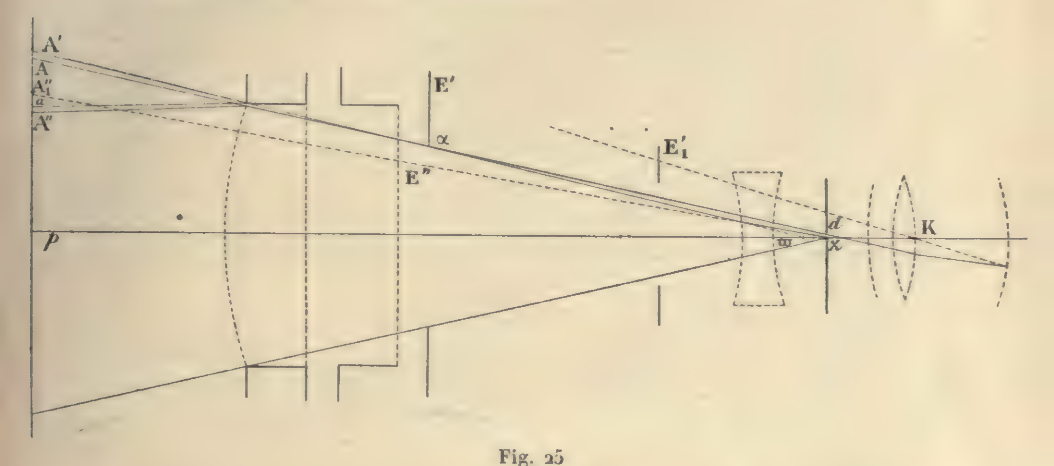


Fig. 25

Lorsque l'on vise à travers l'objectif et l'oculaire un objet de 44mm,5 de dimensions, cela veut dire dans notre figure que du point a part un rayon qui, après réfraction est tangente au diaphragme en α, suivant $\alpha\varpi$, puis après une seconde réfraction vient passer par le point z et est reporté dans la direction $zE''A''_1$. Le grossissement tel qu'on le définit dans la lunette astronomique sera donc donné par le rapport des tangentes de l'image de l'*objet visée*, à l'objet lui-même à l'œil nu, savoir

$$G' = \frac{\text{tang } A''_1zp}{\text{tang } azp} = \frac{A''_1p}{ap}.$$

En réalité, l'œil ne vise pas d'image virtuelle, comme nous l'avions vu, quand il est au point de l'objet visé, mais comme après réfraction l'angle visuel est toujours $E''zp$, il en résulte que la relation ci-dessus donne bien le grossissement, défini par les angles sous lesquels on voit l'objet visé ap après et avant réfraction. Le grossissement de l'objectif seul (sans oculaire) (vision trouble) sera de même donné par le rapport

$$\frac{\text{tang } Azp}{\text{tang } A''zp} = \frac{Ap}{A''p}.$$

Le grossissement de l'objectif déterminé *à l'aide de l'oculaire* serait au contraire donné par (A′ et a étant vus dans la direction commune $zE''A_1$),

$$\frac{\text{tang } A'zp}{\text{tang } azp} = \frac{A'p}{ap}.$$

Ainsi dans la figure 25 on a les hauteurs ci-jointes observées

$A'p$	Oculaire seul.
ap	Objectif et oculaire.
Ap	Ni oculaire, ni objectif.
$A''p$	Objectif seul.

Et l'on obtient ainsi $\frac{Ap}{A''p} = 1{,}50$ $\quad \frac{A'p}{ap} = 1{,}46$; par conséquent le grossissement de l'objectif seul sera exactement déterminé par le rapport

$$G = \frac{Ap + A'p}{ap + A''p} = 1{,}49.$$

D'un autre côté, le grossissement final quand on observera avec l'objectif et l'oculaire en z s'obtiendra en remarquant que l'on observe la hauteur ap tangente en α avec le système des deux lentilles et comme venant après réfraction à travers celles-ci de A''_1, on a donc, comme nous l'avons déjà indiqué

$$G' = \frac{A''_1p}{ap}.$$

Comme le grossissement de l'objectif seul quand on est en z est égal à $\frac{Ap}{A''p} = \frac{A'p}{ap}$ sensiblement, et que $A'p > A''_1p$, on voit que l'action de la lentille divergente est de *diminuer* le grossissement dû à l'objectif. C'est donc celui-ci seul qui intervient dans le grossissement de la lunette de Galilée.

La formule ci-dessus revient à

$$G' = \frac{A'p}{ap} \cdot \frac{A''_1p}{A'p}.$$

Or, le rapport $\frac{A'p}{ap}$ est le grossissement de l'objectif seul, que nous représenterons par G et $\frac{A''_1p}{A'p} = \frac{E''}{E'} = D$ la diminution due à l'occulaire seul,

on voit donc que le grossissement dans la lunette de Galilée est exprimée par la relation

$$G' = G \times D.$$

Donc expérimentalement on déterminera $\frac{E''}{E'}$ pour différentes distances de l'observateur à l'oculaire pour lesquelles $\frac{A'p}{ap}$ se déterminera nettement en intercalant et supprimant l'objectif, on vérifiera alors que le produit redonne une valeur inférieure à $\frac{Ap}{ap}$ directement déterminé.

C'est surtout pour les distances suffisamment grandes de l'œil à l'oculaire que D prendra des valeurs de plus en plus petites, et par suite que l'on pourra juger de l'exactitude de cette relation. Dans ces premières recherches nous voulons simplement démontrer que le grossissement est moindre avec l'oculaire que sans oculaire.

On aura donc dans ces trois séries d'expériences

		1re expérience à 0m,142	2e expérience à 3 mètres	3e expérience à 83 mètres
Grossissement objectif	$\frac{Ap}{A''p}$	$\frac{64,7}{43,0} = 1,50$	$\frac{128,2}{49,0} = 2,62$	$\frac{34,5}{11,8} = 2,92$
Grossissement objectif et oculaire $\frac{A_1''p}{ap} < \frac{Ap}{ap}$	$\frac{Ap}{ap}$	$\frac{64,7}{44,5} = 1,45$	$\frac{128,2}{53,0} = 2,43$	$\frac{34,5}{13,6} = 2,53$

Il résulte nettement de ces mesures, que le grossissement de la lunette de Galilée est uniquement dû à l'objectif, ce qui est conforme à ce que l'on observe avec un verre grossissant quand l'œil est placé entre le verre et l'image optique qu'il fournit ; que l'addition de l'oculaire biconcave devant l'œil diminue le grossissement encore plus que ne l'indiquent les rapports ci-dessus. Par conséquent on retrouve les propriétés des lentilles biconcaves.

Que le grossissement de la lunette de Galilée revient sensiblement à celui de l'objectif seul quand l'œil est tout contre l'oculaire, par suite que la variation observée dans le grossissement est celle de l'objectif et que l'on a en visant des objets de plus en plus éloignés.

$$\frac{F + x}{F + x - \varepsilon} < \frac{F}{F - \varepsilon}$$

qui donne en effet pour un même tirage ε

$$F(F + x) - \varepsilon(F + x) < F(F + x) - \varepsilon F$$

Or dans la première et la dernière expérience l'écartement ε des deux lentilles était sensiblement le même, par conséquent le grossissement dans la 3e expérience devait être plus grand que dans la première, où l'œil était plus éloigné de l'image de projection. C'est ce que l'expérience a permis de vérifier.

Ces expériences nous montrent donc de la façon la plus nette le rôle de la lentille convergente. C'est elle seule qui intervient comme verre grossissant dans l'observation habituelle avec la lunette de Galilée. Au point de vue *du grossissement* l'oculaire a peu d'importance, *quand l'œil est tout contre.* Mais en ce qui concerne la vision nette, il est fondamental, puisque comme dans le microscope solaire, il permet de déplacer l'image de projection qui se formait dans l'œil et de l'amener rigoureusement sur la choroïde. Montrons maintenant le rôle énorme de l'oculaire sur le grossissement. Ceci se présente au fur et à mesure que l'œil s'écarte de la lentille biconcave.

Observateur au delà de l'image optique

L'observateur était à 9 centimètres de l'oculaire et voyait très distinctement avec celui-ci seul un corps de bâtiment à 83 mètres de distance. On était donc à la vision distincte de l'image virtuelle de l'oculaire. En plaçant alors devant l'œil le diaphragme ordinaire de 1 millimètre d'ouverture, on se mettait à une distance invariable de l'oculaire et on avait une vision nette soit de l'image virtuelle avec l'oculaire seul, soit de l'objet visé toujours *droit* avec l'objectif et l'oculaire (ici sans tirage), soit de l'image *renversée* en a' quand on supprimait l'oculaire, soit de l'objet visé pA directement à travers l'ouverture E'_1 quand on supprimait l'objectif et l'oculaire. On pouvait donc ainsi procéder à des mesures précises. Ici c'est le diaphragme, E'_1 à 1,5 millimètre de l'oculaire qui sert de terme de comparaison ; $a''x'$ est toujours l'image virtuelle de l'*objet* avant qu'on ait intercalé la lentille convergente (*fig.* 26).

Distance de l'œil à l'oculaire, 9 centimètres, vision nette avec l'oculaire seul. Objet visé à 83 mètres. Vision nette sans tirage de l'objet *ap*.

Oculaire et objectif . .	image droite . . .	$2pa = 5^{m},5$
Objectif seul	image renversée . .	$2pj = 4^{m},05$
Oculaire seul	image droite . . .	$2pA'' = 21^{m},4$
Ni oculaire, ni objectif		$2pA = 8^{m},7$

Etant à la vision nette de l'image virtuelle $a''x'$ sans objectif on ne l'était donc plus de l'image virtuelle C′ de l'objectif. Donc on ne visait pas d'image virtuelle quand pour un tirage convenable on voyait nettement l'objet *ap*.

Ici impossible de soutenir d'après les figures (1) et (4) que l'image virtuelle $a''x'$ même en admettant qu'on l'eût visée encore après l'intercalation de l'objectif correspondait à l'image optique de projection fournie par cette lentille comme les auteurs l'avaient enseigné, autrement dit renversée sur le fond de l'œil comme sur l'écran, de projection puisque les images virtuelles, restent *droites*, l'objet visé est toujours vu droit et l'image de projection de celui-ci, est *vue renversée*, c'est-à-dire *droite* sur le fond de l'œil, donc renversée sur l'écran et droite sur la choroïde ; en dehors de ce fait que nous avons déjà signalé que à la distance A′, l'image de projection correspond à un objet visé *pj* de $4^m,05$ sans oculaire et à un objet *pa* de $5^m,5$ avec oculaire. Donc ce n'était pas le *même objet* dont l'image de projection était vue agrandie.

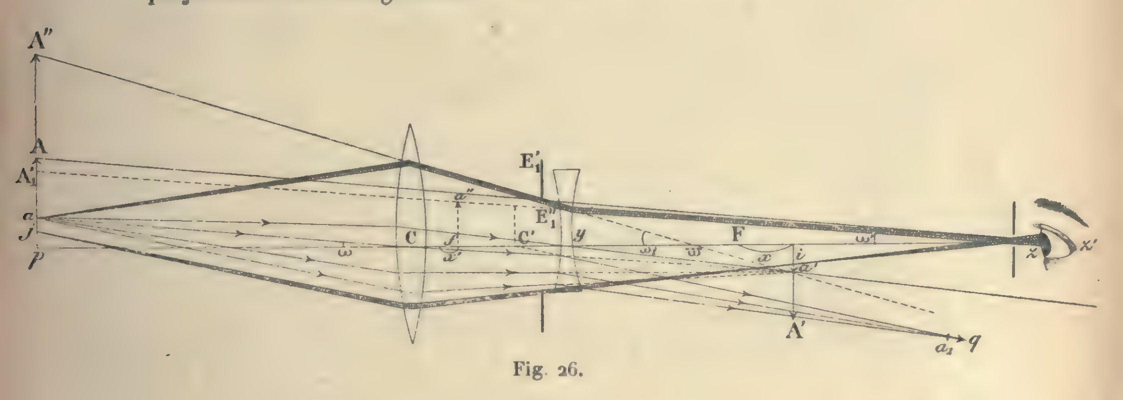


Fig. 26.

En outre, nous faisons ici la démonstration qui est une confirmation de la figure (2) exacte des auteurs, que les rayons allant faire image optique à la distance A′ mais passant *au-dessous* du centre optique de l'oculaire étaient déviés en *q* dès que l'on intercalait la lentille biconcave entre l'image optique et l'objectif. Seuls les rayons qui interviennent aussi pour donner l'image de projection d'un point, mais passant *au-dessus* du centre optique de l'oculaire, subissaient une déviation, par l'intercalation de celui-ci, qui reportait de ϖ en *z* les faisceaux lumineux pouvant ainsi entrer dans l'œil.

On reconnaît donc une fois de plus la grossière erreur géométrique commise par les auteurs faisant converger non pas en *q* mais de l'autre côté de la lentille, les rayons convergents donnant l'image réelle *a′* avant l'intercalation de l'oculaire.

Le calcul du grossissement se fera facilement. Le grossissement est exactement donné par la relation

$$G' = \frac{pA'_1}{pa}.$$

Si l'on suppose, ce qui est le cas des expériences actuelles, Cz négligeable par rapport à $pC = 83$ mètres, la tangente pa de l'angle visuel peut être remplacée par tang ω d'où

$$G' = \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega};$$

mais les mesures ne donnent pas tang ω' savoir pA'_1 mais pA. On a la relation

$$pA'_1 = pA . \frac{E''_1}{E'_1},$$

E'', E' désignant les ouvertures aux rayons réels sans déviation et virtuels.

Or on a

$$\frac{1}{\varpi} - \frac{1}{z} = \frac{1}{f}.$$

Si l'on désigne par d la distance du diaphragme E' à la partie externe y de l'oculaire qui était de 21 millimètres, on aura

$$\frac{z}{y} = \frac{z + d}{E''_1}, \qquad \frac{\varpi}{y} = \frac{\varpi + d}{E'_1},$$

d'où

$$\frac{E''_1}{E'_1} = \frac{\varpi}{z} \cdot \frac{z + d}{\varpi + d},$$

ϖ étant connu en fonction de z et de f par la relation des lentilles divergentes, $\frac{E''_1}{E'_1}$ est donc connu, d'où pA'_1.

Pour $z = 9^c$ et $f = 5^c$, on avait $\varpi = 3^c,2$, d'où $\frac{E''_1}{E'_1} = 0,74$.

Ayant déterminé le rapport $\frac{E''_1}{E_1} = 0,74$ pour cette distance et un foyer de 5 centimètres, nous obtenons

$$2\, pA''_1 = 8^m,7 \times 0,74 = 6^m,44.$$

Par suite le grossissement à cette distance sera égal à

$$G' = \frac{2pA_1'}{2pa} = \frac{6^m,44}{5,5} = 1,17.$$

Si dans notre figure 26 nous enlevons l'objectif, nous voyons que le faisceau qui pénètre dans l'œil va aboutir en A″. Donc, puisque en intercalant l'objectif on ne voit plus à travers la même ouverture E_1' que $2pa$ au lieu de $2pA''$ il en résulte que le *grossissement* dû à l'*objectif* est égal à $\frac{A''p}{ap} = \frac{21,4}{5,5} = 4,0.$

Si l'observateur était en ϖ et que l'on vînt à supprimer l'oculaire, le rapport $\frac{A''p}{ap}$, l'objet étant très éloigné, donnerait précisément le grossissement de l'objectif seul.

On voit donc que si ici, il y a une aussi grande différence entre le grossissement total 1,17 et le grossissement de l'objectif seul 4,0 alors que ces deux quantités étaient presques égales quand l'œil était tout contre l'oculaire, cela tient à ce que z est très différent de ϖ. Nous avons calculé $\varpi = 3^c,2$, pour $z = 9^c$, tandis que ces deux quantités étaient presque égales quand l'œil est tout contre la lentille.

Mais on a

$$G' = \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega} = \frac{\text{tang } \omega_1}{\text{tang } \omega} \times \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega_1},$$

en nommant ω_1 l'angle sous lequel on vise pA'' en ϖ.

Le rapport $\frac{\text{tang } \omega_1}{\text{tang } \omega}$ représente le grossissement G dû à l'objectif seul, $\frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega_1}$, la diminution D dûe à la lentille.

On a effectivement

$$\text{tang } \omega' = \frac{pA_1'}{p + \varepsilon + z}, \qquad \text{tang } \omega_1 = \frac{pA''}{p + \varepsilon + \varpi}.$$

Si donc $\varepsilon + z$ et $\varepsilon + \varpi$ sont négligeables par rapport à p

$$D = \frac{\text{tang } \omega'}{\text{tang } \omega_1} = \frac{pA_1'}{pA''} = \frac{6,44}{21,4} = 0,3.$$

Ayant déterminé plus haut le grossissement dû à l'objectif seul et l'ayant trouvé égal à 4,0, on a donc

$$G' = 4{,}0 \times 0{,}3 = 1{,}2,$$

nous l'avons mesuré précédemment et trouvé égal à 1,17. La formule générale

$$G' = G \times D,$$

est donc bien démontrée, que l'observateur soit placé en deçà ou au delà de l'image optique.

RÉSUMÉ

Nous sommes arrivé à la fin de cette étude et nous avons eu un exemple frappant de ce que vaut une théorie lorsque le point de départ est une idée fausse comme celle représentée par la figure 1 des ouvrages.

Rarement, croyons-nous, on a rencontré pareille accumulation d'erreurs dans une théorie classique.

Quel fut le premier auteur de la figure 1 ? Nous n'avons pu le savoir, et personne n'a pu nous renseigner à ce sujet.

Mais on voit combien il est dangereux d'admettre comme exacte une construction uniquement parce que de tout temps elle a été donnée, et de la reproduire sans contrôle.

Il aurait suffi d'appliquer la loi des indices de réfraction aux deux rayons convergents allant former une image de projection d'un point, fournie par la première lentille, pour reconnaître que ces rayons restaient convergents au sortir de l'oculaire et par suite ne pouvaient transformer une image réelle en une image virtuelle. C'est ce que nous avons démontré à l'aide de notre figure 2 *bis*, conforme à celle (2) des auteurs, pour le microscope solaire.

La comparaison des figures 1 et 2 aurait du reste suffi à donner la preuve que l'une des deux était fausse.

Mais comment admettre que tant de professeurs ont pu répéter la même construction fausse ?

Une des raisons est que la distinction entre les rayons de vision et les rayons de construction des lentilles n'est jamais faite. Rarement on s'inquiète de montrer les rayons pénétrant dans l'œil des observateurs. En outre, la plupart des professeurs ignorent encore aujourd'hui que la lunette de Galilée a permis à Miethe de photographier les objets éloignés.

Il en résulte que les rayons de la figure 1 leur semblaient tout naturellement être ceux que l'on voyait. Aussi il sera indispensable de donner tout d'abord, dans la description nouvelle de la lunette de Galilée, la figure 26.

Celle-ci a l'avantage de montrer de suite la distinction fondamentale entre les rayons de vision représentés par un mince pinceau haché et les rayons de projection, de photographie aCq. Avec les premiers, l'objet est vu *droit ;* avec les seconds, on a sur un écran une image *renversée* des objets.

Une fois cette distinction faite, il n'y a plus qu'à montrer l'œil se rapprochant de l'oculaire et voyant toujours l'objet droit, grâce à la même construction, alors que le faisceau de rayons passant au-dessous du centre optique de l'objectif et de l'oculaire continue à fournir des rayons de projection, de photographie.

Puis avec la même figure on étudie successivement le rôle des deux lentilles, et par suite on peut faire pressentir que le calcul du grossissement sera fonction des propriétés individuelles de celles-ci, et montrer que l'œil étant tout contre l'oculaire, le grossissement se réduit sensiblement à celui que donnerait l'objectif seul.

Etudiant alors le rôle fondamental de l'oculair ecomme permettant ici, par un tirage convenable (*fig.* 6), de ramener sur la choroïde l'image de projection formée dans l'œil en avant de celle-ci, on aura donné la véritable théorie de la lunette de Galilée dans laquelle il ne restera plus rien d'obscur.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

I. — De la vision à travers les lentilles

II. — Théorie complète en tenant compte de la réfraction de l'œil

I. — De la vision distincte à travers une lentille divergente

II. — De la vision à travers une lentille convergente

III. — Partie expérimentale

1° *Observateur tout contre l'oculaire*

2° *Observateur au-delà de l'image optique*

Résumé

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie BUSSIÈRE.

